Material Teórico - Módulo Quadriláteros

Relação de Euler Para Quadriláteros

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de agosto de 2019

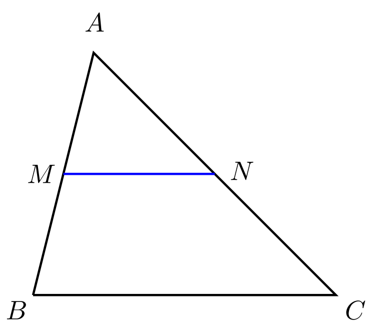
PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP

1 Bases médias em triângulos

Iniciamos este material com uma discussão sobre bases médias em triângulos, conteúdo que servirá de ferramenta para o que desejamos apresentar em seguida. Aproveitamos o ensejo para fazer algumas outras aplicações.

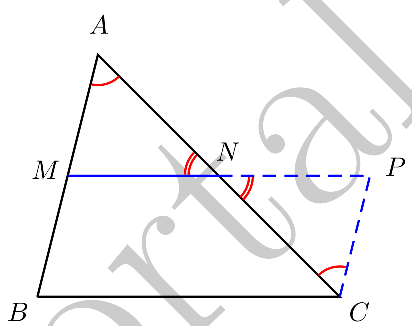
Teorema 1 (Bases médias em triângulos). *Sejam ABC um triângulo qualquer e M o ponto médio de AB. Uma condição necessária e suficiente para que um ponto N, situado sobre o lado AC, seja o ponto médio desse lado é que MN seja paralelo a BC. Além disso, se esse for o caso, teremos*

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}.$$



Prova. Inicialmente, suponha que N é o ponto médio de BC (acompanhe o raciocínio na figura a seguir).

Considere o ponto P, sobre a semirreta $\overrightarrow{MN}$, tal que $\overline{NP} = \overline{MN}$. Veja que $M\widehat{N}A = P\widehat{N}C$, pois $\angle MNA$ e $\angle PNC$ são ângulos opostos pelo vértice, e $\overline{AN} = \overline{CN}$, pois N é o ponto médio de BC.

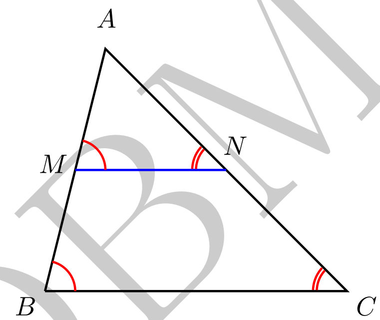


Assim, os triângulos ANM e CNP são congruentes (pelo caso de congruência LAL), logo, $\overline{CP} = \overline{AM} = \overline{BM}$. Além disso, ainda pela congruência dos triângulos ANM e CNP, temos que $N\widehat{C}P = N\widehat{A}M$; portanto, a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ faz ângulos alternos internos iguais com $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CP}$, de sorte que $\overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{CP}$.

Os argumentos acima garantem que $BCPM$ é um quadrilátero que possui um par de lados opostos, BM e CP, paralelos e congruentes. Mas essa é uma condição suficiente para que $BCPM$ seja um paralelogramo. Daí, segue que MN é paralelo a BC e, como N é médio de MP,

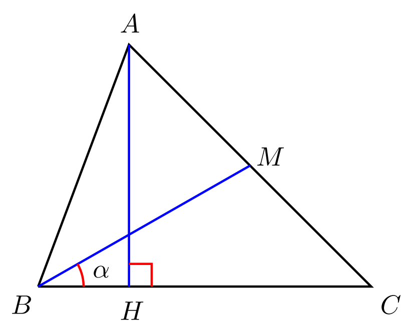
$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}.$$

Reciprocamente, se N é um ponto sobre o lado AC tal que MN é paralelo a BC, então (veja a próxima figura) $A\widehat{M}N = A\widehat{B}C$ e $A\widehat{N}M = A\widehat{C}B$. Logo, os triângulos AMN e ABC são semelhantes (pelo caso AA), com razão de semelhança igual a $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$. Daí, concluímos que $\overline{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$, ou seja, que N é o ponto médio de AC. $\square$



A seguir, veremos algumas aplicações do teorema da base média.

Exemplo 2. *Na figura abaixo, M é o ponto médio de AC e H é o pé da altura relativa ao vértice A. Suponha que $\overline{AH} = \overline{BM}$, ou seja, que a mediana relativa ao vértice B e a altura relativa ao vértice A têm a mesma medida. Calcule $\alpha = M\widehat{B}C$.*

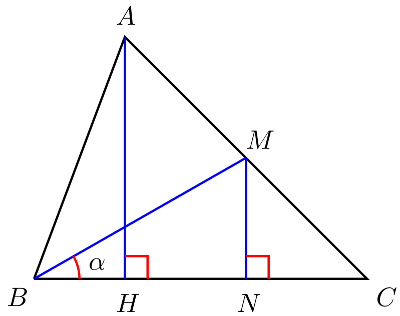


Solução. Seja N a interseção, com o lado BC, da (única) reta paralela a AH que passa pelo ponto M (acompanhe na figura a seguir). Temos que $M\widehat{N}B = 90°$ e, pelo teorema 1, N é o ponto médio de BC e $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH}$. Mas, por hipótese, $\overline{AH} = \overline{BM}$, o que acarreta $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM}$ ou, ainda, $\frac{\overline{MN}}{\overline{BM}} = \frac{1}{2}$.

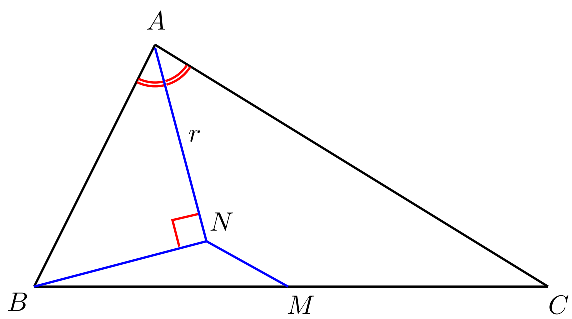
Agora, observando o triângulo retângulo MNB, notamos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{MN}}{\overline{BM}} = \frac{1}{2}.$$

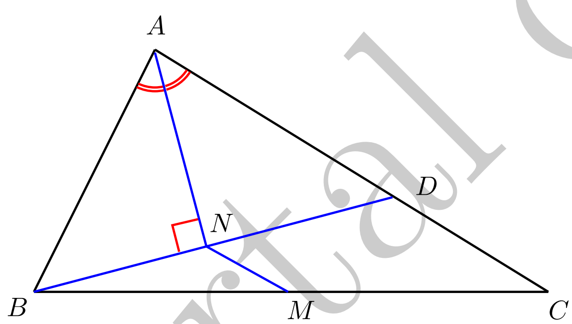
Assim, concluímos que $\alpha = 30°$. $\square$



Exemplo 3. *Na figura abaixo, M é o ponto médio de BC, r é bissetriz interna de $\angle BAC$ e N é o pé da perpendicular baixada de B a r. Se $\overline{AB} = 12$cm e $\overline{AC} = 20$cm, calcule a medida do segmento MN.*



Solução. Denotemos por D o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{BN}$ com o lado AC (veja a próxima figura).

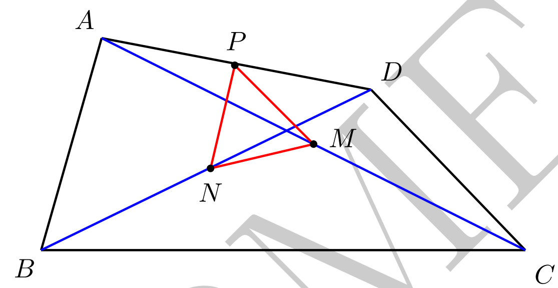


Note que AN é, ao mesmo tempo, altura e bissetriz interna relativa ao vértice A do triângulo ABD. Desse modo, sabemos que ABD é isósceles de base BD. Logo, $\overline{AD} = \overline{AB} = 12$cm. Além disso, AN também é mediana do triângulo ABD relativa ao vértice A, assim, N é o ponto médio de BD. Portanto, aplicando o teorema 1 ao triângulo BCD, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \frac{1}{2}\cdot\overline{DC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overline{AC} - \overline{AD}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot(20-12) = \frac{8}{2} = 4.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Sejam $ABCD$ um quadrilátero, M, N e P os pontos médios das diagonais AC e BD e do lado AD, respectivamente. Suponha que $A\widehat{B}C + D\widehat{C}B = 120°$ e que $\overline{AB} = \overline{CD} = 6$. Calcule o perímetro do triângulo MNP.*



Solução. Inicialmente, note que PN é base média de ABD, logo, PN é paralelo a AB e

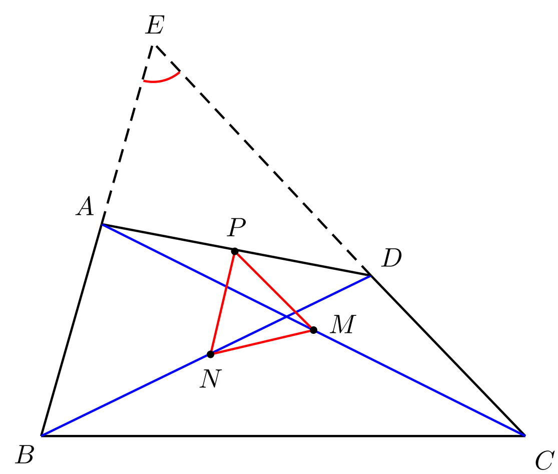
$$\overline{PN} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Analogamente, temos que PM é paralelo a CD, de modo que

$$\overline{PM} = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

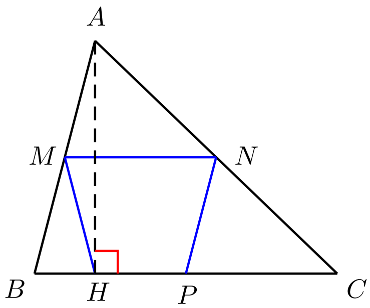
Assim, PMN é um triângulo isósceles de base MN.

Agora, seja E a interseção entre os prolongamentos dos lados AB e CD (veja a figura abaixo). Como $E\widehat{B}C + E\widehat{C}B = A\widehat{B}C + D\widehat{C}B = 120°$ e a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, temos que $B\widehat{E}C = 180° - 120° = 60°$. Além disso, uma vez que $PN \parallel EB$



e $PM \parallel ED$, segue que $N\widehat{P}M = B\widehat{E}C = 60°$. Portanto, PMN, sendo isósceles com ângulo do vértices igual a $60°$, é, de fato, um triângulo equilátero. Então, $\overline{MN} = 3$ e o perímetro de PMN é igual a 9. □

Exemplo 5. *Sejam ABC um triângulo, M, N e P os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente, e H o pé da altura relativa ao lado BC. Suponha que $AB = 8$, $BH = 2$ e $BC = 10$. Calcule o perímetro do quadrilátero $MNPH$.*



Solução. Para resolver esse problema, aplicaremos algumas vezes o teorema 1. Com efeito, MN é base média do triângulo ABC, logo, $MN \parallel BC$ (assim, $MNPH$ é um trapézio) e

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Analogamente, $NP \parallel AB$ e

$$\overline{NP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

Agora, uma vez que P é ponto médio de BC, temos que

$$\overline{PH} = \overline{BP} - \overline{BH} = 5 - 2 = 3.$$

Para encontrar o perímetro do trapézio $MNPH$, resta calcular a medida de MH. De $A\widehat{H}B = 90^\circ$ segue que H pertence ao semicírculo que tem AB por diâmetro. Como M é o ponto médio de AB, temos que M é o centro desse semicírculo; logo,

$$\overline{MH} = \overline{MA} = \overline{MB} = 4.$$

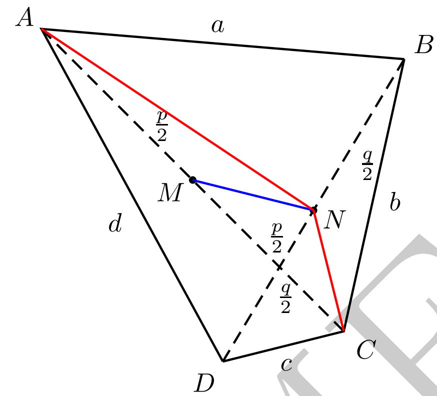
Portanto, o perímetro de $MNPH$ é $5+4+3+4 = 16$. $\square$

2 A relação de Euler para quadriláteros

O objetivo desta seção é demonstrar a *relação de Euler* para quadriláteros, assim nomeada em homenagem ao matemático suíço do século XVIII Leonhard Euler.

Para enunciá-la, tomamos um quadrilátero qualquer $ABCD$ e marcamos os pontos médios M e N das diagonais AC e BD, respectivamente. O segmento MN é denominado **mediana de Euler** do quadrilátero $ABCD$ (veja a figura a seguir).

No quadrilátero $ABCD$, sejam $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ e $d = \overline{DA}$. Denote, ainda, $p = \overline{AC}$ e $q = \overline{BD}$. Como



M é médio de AC, temos $\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{p}{2}$; da mesma forma, N médio de BD fornece $\overline{BN} = \overline{DN} = \frac{q}{2}$.

Aplicando a relação de Stewart aos triângulos ABD e BCD, obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned}
&\overline{AB}^2 \cdot \overline{DN} + \overline{AD}^2 \cdot \overline{BN} = \overline{BD} \cdot (\overline{AN}^2 + \overline{DN} \cdot \overline{BN}) \\
\Longrightarrow\ & a^2 \cdot \frac{q}{2} + d^2 \cdot \frac{q}{2} = q \cdot \left(\overline{AN}^2 + \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{2}\right) \\
\Longrightarrow\ & (a^2 + d^2) \cdot \frac{q}{2} = q \cdot \left(\overline{AN}^2 + \frac{q^2}{4}\right) \\
\Longrightarrow\ & \overline{AN}^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{2} - \frac{q^2}{4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\overline{BC}^2 \cdot \overline{DN} + \overline{CD}^2 \cdot \overline{BN} = \overline{BD} \cdot (\overline{CN}^2 + \overline{DN} \cdot \overline{BN}) \\
\Longrightarrow\ & b^2 \cdot \frac{q}{2} + c^2 \cdot \frac{q}{2} = q \cdot \left(\overline{CN}^2 + \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{2}\right) \\
\Longrightarrow\ & (b^2 + c^2) \cdot \frac{q}{2} = q \cdot \left(\overline{CN}^2 + \frac{q^2}{4}\right) \\
\Longrightarrow\ & \overline{CN}^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{q^2}{4}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicamos a relação de Stewart ao triângulo ACN, para obter:

$$\overline{AN}^2 \cdot \overline{CM} + \overline{CN}^2 \cdot \overline{AM} = \overline{AC} \cdot (\overline{MN}^2 + \overline{AM} \cdot \overline{CM}).$$

Substituindo, nesta última igualdade, $\overline{AC} = p$ e $\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{p}{2}$, ficamos com

$$\overline{AN}^2 \cdot \frac{p}{2} + \overline{CN}^2 \cdot \frac{p}{2} = p \cdot (\overline{MN}^2 + \overline{AM} \cdot \overline{CM})$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{1}{2}(\overline{AN}^2 + \overline{CN}^2) = \overline{MN}^2 + \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2}.$$

Agora, substituindo nessa igualdade as expressões para $\overline{AN}^2$ e $\overline{CN}^2$ obtidas anteriormente, ficamos com

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{d^2}{2} - \frac{q^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{q^2}{4}\right) = \overline{MN}^2 + \frac{p^2}{4}.$$

Isso é o mesmo que

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\frac{q^2}{4}=\overline{MN}^2+\frac{p^2}{4}$$

ou, multiplicando ambos os membros por 4, que

$$a^2+b^2+c^2+d^2-q^2=4\overline{MN}^2+p^2.$$

Então, obtemos por fim

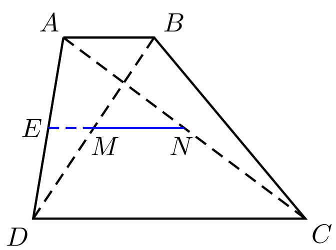
$$a^2+b^2+c^2+d^2=p^2+q^2+4\overline{MN}^2.$$

Resumimos a discussão acima no seguinte

Teorema 6 (relação de Euler para quadriláteros). *Sejam $ABCD$ um quadrilátero, M e N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente. Sejam, ainda, $a=\overline{AB}$, $b=\overline{BC}$, $c=\overline{CD}$, $d=\overline{AD}$, $p=\overline{AC}$ e $q=\overline{BD}$. Então*

$$a^2+b^2+c^2+d^2=p^2+q^2+4\overline{MN}^2.$$

No caso em que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio, podemos calcular $\overline{MN}$ diretamente, da seguinte forma: seja E o ponto médio do lado AD (veja a figura a seguir). Aplicando o teorema da base média ao triângulo ACD, concluímos que EN é paralelo a CD. Mas, como EM é



base média do triângulo ABD, o teorema da base média (aplicado dessa vez ao triângulo ABD) garante que os pontos E, M e N são colineares.

Agora, note que

$$\overline{EM}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}=\frac{a}{2}\ \text{e}\ \overline{EN}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}=\frac{c}{2}.$$

Portanto,

$$\overline{MN}=\overline{EN}-\overline{EM}=\frac{c}{2}-\frac{a}{2}=\frac{c-a}{2}.$$

Finalmente, aplicando a relação de Euler a $ABCD$, obtemos

$$\begin{aligned}
&p^2+q^2+4\overline{MN}^2=a^2+b^2+c^2+d^2\\
\Longrightarrow\ &p^2+q^2+4\left(\frac{c-a}{2}\right)^2=a^2+b^2+c^2+d^2\\
\Longrightarrow\ &p^2+q^2+\cancel{c^2}-2ac+\cancel{a^2}=\cancel{a^2}+b^2+\cancel{c^2}+d^2\\
\Longrightarrow\ &p^2+q^2=b^2+d^2+2ac.
\end{aligned}$$

Resumimos a discussão acima no seguinte

Corolário 7. *Em todo trapézio, a soma dos quadrados das medidas das diagonais é igual à soma das medidas dos quadrados dos lados não paralelos com o dobro do produto das medidas das bases.*

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas ou três sessões de 50min para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos ao professor que, antes de apresentar a demonstração da relação de Euler, faça uma revisão sobre cevianas e relação de Stewart. É importante que as demonstrações sejam apresentadas com todos os detalhes, para que não restem dúvidas.

Recomendamos, ainda, que seja apresentado aos alunos um número considerável de exemplos envolvendo bases médias em triângulos, pois esse conteúdo é muito comum em problemas que podem aparecer mais adiante. Ao apresentar os exemplos, ressalte os momentos nos quais os teoremas são utilizados, pois isso faz com que os alunos percebam a importância desses resultados, bem como a organicidade da Matemática.

As referências listadas a seguir trazem outros exemplos e aplicações dos resultados apresentados neste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2012.