Material Teórico - Módulo Sistemas de Numeração e Paridade

Paridade - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

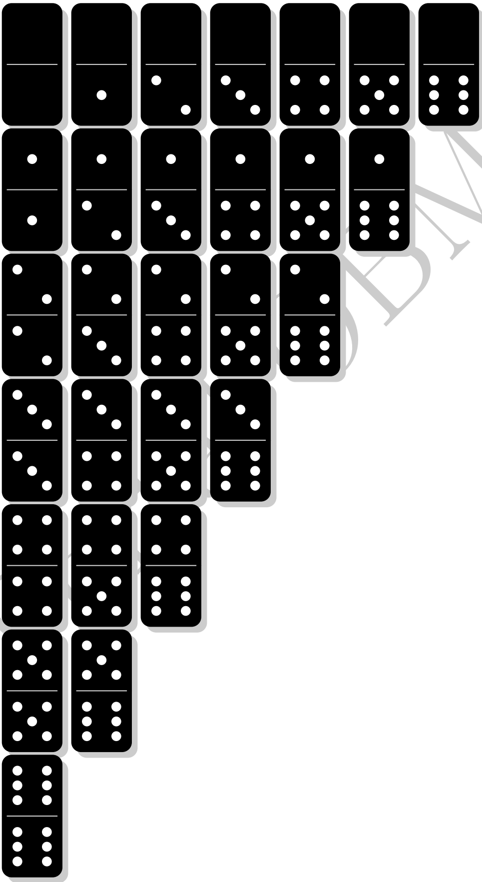
28 de março de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

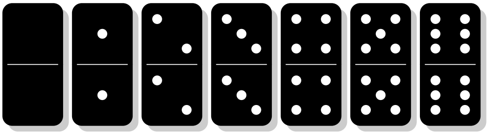
1 Exercícios variados sobre paridade

Ao longo deste material, continuaremos apresentando exemplos que envolvem a ideia de paridade.

O **dominó** é um jogo formado por 28 peças com formatos retangulares 2×1. Em uma peça de dominó, cada metade 1×1 é marcada com pontos que correspondem a um valor numérico de 0 a 6. Na figura abaixo, podemos ver a ilustração das peças de um dominó.

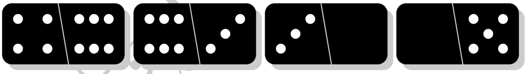


Podemos contar, ao todo, 28 peças. De fato, se retirarmos as peças nas quais aparece um mesmo número representado nos dois lados (veja a figura a seguir), restarão 6 peças de cada número.

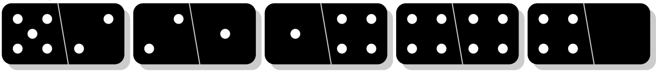


Como temos ao todo 7 números — de 0 até 6 — e 6 peças para cada número, obtemos um total de $7 \cdot 6 = 42$ peças. Mas cada uma dessas peças foi contada duas vezes — por exemplo, a peça na qual figuram os números 5 e 6 foi contada como uma peça na qual o 5 figura e também como uma peça na qual o 6 figura — assim, o total de peças é $42 \div 2 + 7 = 21 + 7 = 28$.

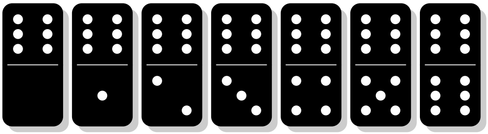
O desenvolvimento do jogo consiste em arranjar essas peças sobre uma mesa, de modo que cada peça, exceto a primeira e a última peças jogadas, fique em contato com outras duas peças e as partes que estão em contato nas duas peças devem ter o mesmo número. Veja, abaixo, uma simulação de jogo:



Exemplo 1. *Imagine que todas as peças de um dominó foram colocadas sobre uma mesa, formando um arranjo de duas pontas. O início desse arranjo aparece na figura abaixo. Veja que em uma das pontas aparece o número* 5. *Qual o número que aparece na outra ponta?*



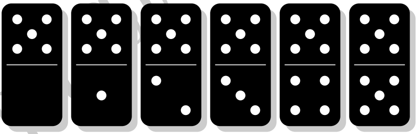
Solução. Como foram utilizadas todas as 28 peças para formar o arranjo, temos que cada número aparece 8 vezes. Por exemplo, as oito peças nas quais aparece o número 6 são as da figura a seguir:



Exceto pelos números que estão nas duas pontas, todos os demais aparecem no arranjo aos pares, pois as partes que ficam em contato em duas peças que estão lado a lado apresentam números iguais. Se o número que aparece na outra ponta não for 5, os 7 números 5 restantes — tirando o que aparece na ponta que inicia o arranjo — devem aparecer aos pares, mas é claro que isso não pode acontecer. Logo, o número que aparece na outra ponta também é 5. □

Exemplo 2. *Em um dominó comum, descartarmos todos as peças nas quais figura o número* 6*. É possível formar um arranjo com todas as demais peças?*

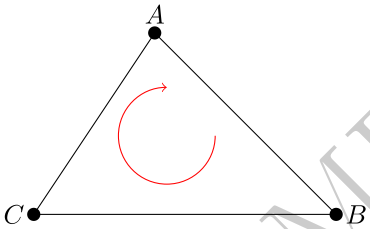
Solução. Quando descartamos todas as 7 peças nas quais aparece o número 6, cada número passa a figurar exatamente 7 vezes nas 21 peças restantes. A título de ilustração, mostramos a seguir as peças, dentre as 21 que sobraram, nas quais aparece o número 5:



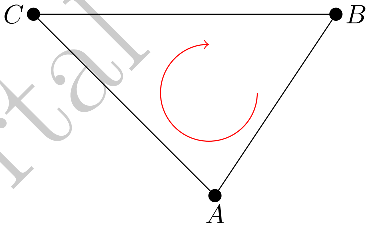
Tirando os números que aparecem nas pontas do arranjo, todos os demais números devem aparecer aos pares. Mas isso não acontece. De fato, cada um dos números que não aparecem nas pontas deve aparecer exatamente 7 vezes no arranjo, mas 7 é um número que não pode ser contado aos pares. □

Exemplo 3. *Três discos de madeira A, B e C, não alinhados, estão sobre uma mesa. Uma pessoa bate em um deles de tal forma que esse disco passa entre os outros dois. A pessoa faz isso — passa um disco entre os outros dois — um total de* 25 *vezes. É possível que os três discos voltem às suas posições iniciais?*

Solução. Digamos que os três discos sejam os vértices de um triângulo ABC, quando lemos os vértices A, B e C no sentido horário. De fato, observando a sequência dos vértices no sentido horário, podemos denotar o triângulo por ABC, BCA ou CAB. Veja a próxima figura.



Quando um disco passa entre outros dois, ainda observando a sequência dos vértices no sentido horário, o novo triângulo é denotado por ACB, BAC ou CBA. Veja a figura abaixo.



Desse modo, para voltar à posição inicial, é necessário que o movimento de passar um disco entre os outros dois seja feito uma quantidade par de vezes, logo, não é possível que os discos retornem às suas posições iniciais depois de 25 movimentos. $\square$

Exemplo 4. *Quinze garotos e quinze garotas estão sentados redor de uma mesa circular. É sempre possível encontrar uma pessoa tal que seus dois vizinhos sejam, ambos, garotas?*

Solução. Suponha que não seja possível, ou seja, que exista um arranjo das pessoas em torno da mesa de modo que cada uma delas tenha como vizinhos ou dois garotos ou uma garota e um garoto.

Denotemos por x a quantidade de pessoas que têm como vizinhos dois garotos e por y a quantidade de pessoas que têm como vizinhos uma garota e um garoto. Então, o dobro do número de garotos é igual a $2x + y$, pois cada garoto é contado duas vezes, uma vez como o vizinho da esquerda e outra como o vizinho da direita. De modo similar, o dobro do número de garotas é igual a y. Uma vez que há 15 garotos e 15 garotas, obtemos

$$\begin{cases} 2x + y = 30 \\ y = 30. \end{cases}$$

Assim, concluímos que $x = 0$, ou seja, não há pessoas que tenham dois garotos como vizinhos. Logo, todas as pessoas têm um garoto e uma garota como vizinhos.

Agora, numeremos as posições ao redor da mesa de 1 a 30. Cada pessoa que ocupa uma posição par tem como vizinho um garoto e uma garota, logo, as posições ímpares serão ocupadas alternadamente por garotos e garotas. Como temos um total de 15 posições ímpares, as pessoas que ocupam as posições 1 e 29 devem ser ambas garotos ou ambas garotas. Assim, a pessoa que ocupa a posição 30 teria como vizinhos dois garotos ou duas garotas, o que é um absurdo.

Concluímos que, independentemente de como as pessoas venham a sentar-se, é sempre possível encontrar uma pessoa tal que seus dois vizinhos sejam, ambos, garotas. □

Exemplo 5. *Em cada um dos* 10 *degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus, em sentido contrário. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?*

Solução. Numeremos os 10 degraus da escada de 1 até 10. Desse modo, se uma rã, após um pulo, mudou a paridade do degrau que ocupa, ela terá pulado uma quantidade ímpar de degraus. Assim, a rã que pulou junto com ela também terá mudado a paridade do degrau que ocupa. Analogamente, se uma rã, após um pulo, não mudou a paridade do degrau que ocupa, então a rã que pulou junto com ela também não mudou essa paridade.

O raciocínio acima garante que, após um pulo, ou a quantidade de rãs que ocupam degraus pares e ímpares não é alterada — caso as duas rãs não mudem as paridades dos degraus que ocupam ou cada uma delas mude para uma paridade diferente da anterior — ou a quantidade de rãs que ocupam degraus com uma paridade aumenta 2 unidades e a quantidade de rãs que ocupam degraus com a outra paridade diminui 2 unidades — caso as duas rãs ocupem degraus com a mesma paridade antes do salto e mudem as paridades dos degraus ocupados após o salto.

Assim, uma vez que na posição inicial as rãs ocupam 5 degraus pares e 5 degraus ímpares, elas não podem ocupar, na posição final, 10 degraus pares e nenhum degrau ímpar ou 10 degraus ímpares e nenhum par. □

Exemplo 6. *Amarildo pensou em um número com* 13 *algarismos e inverteu a ordem desses algarismos, encontrando um novo número. Depois disso, ele somou os dois números. Se Amarildo tiver feito a conta corretamente, mostre que o resultado encontrado por ele deve possuir pelo menos um algarismo par.*

Solução. Suponha o contrário, ou seja, que a soma do número pensado por Amarildo com o número formado pelos mesmos algarismos em ordem inversa possui somente algarismos ímpares.

Observe que, nos dois números, os algarismos da sétima ordem são iguais. Logo, a soma dos algarismos da sexta ordem é maior que 10, o que permite o "vai um" para a sétima ordem — pois, caso contrário, o algarismo da sétima ordem da soma seria par. Agora, como a soma dos algarismos das oitavas ordens dos dois números é igual à soma dos algarismos das sextas ordens, também tem um "vai um" para a nona ordem.

Como o algarismo da nona ordem da soma dos dois números é ímpar, a soma dos algarismos das nonas ordens é par. O mesmo ocorre com a soma dos algarismos das quintas ordens. Logo, tem um "vai um" da quarta para a quinta ordem.

Seguindo com esse raciocínio, temos que a soma dos algarismos das décimas terceiras ordens é par. Mas a soma dos algarismos das décimas terceiras ordem é igual à soma dos algarismos das primeiras ordens e, quando somamos os algarimos da primeiras ordens, não houve um "vai um" da ordem anteior. Logo, o algarismo da primeira ordem da soma seria par, o que é um absurdo. □

Exemplo 7. *Três gafanhotos estão brincando ao longo de uma linha. Na sua vez, cada gafanhoto pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após* 2021 *movimentos?*

Solução. Denotemos os gafanhotos por A, B e C. As possíveis posições relativas para dos gafanhotos são ABC, BCA, CAB, ACB, BAC e CBA. Veja que, se as posições relativas em determinado momento forem ABC, BCA ou CAB, então, depois de um pulo, elas passarão a ser ACB, BAC ou CBA, e vice-versa. Portanto, se a ordem inicial dos gafanhotos for ABC, então essa ordem só poderá voltar a ser ABC depois de uma quantidade par de movimentos. Assim, os gafanhotos não podem retornar para suas posições iniciais após 2021 movimentos. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Para facilitar a compreensão dos exemplos 1 e 2, é interessante utilizar um dominó com peças de verdade.

A referência a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. D. Fomin; S. Genkin; I. Itenberg. *Círculos Matemáticos. A Experiência Russa.* IMPA, Rio de Janeiro, 2012.