Material Teórico - Módulo de Função Logarítmica

Logaritmo como uma Função

Primeiro Ano - Médio

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de junho de 2021

1 A função logarítmica

Dos estudos feitos em módulos anteriores, sabemos que, dado um número real positivo a, a potência a^x está definida para cada número real x. Sendo a^x um número positivo, podemos definir $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, a **função exponencial de base $\boldsymbol{a}$**, por $f(x) = a^x$.

Se $a \neq 1$, f é uma bijeção. Neste caso, essa função exponencial admite uma função inversa $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, de modo que $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$, ou seja,

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Da definição de logaritmo de x na base a, concluímos que

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Desta forma (mantendo a hipótese $0 < a \neq 1$), a inversa da função exponencial de base a será chamada **função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$**, e vamos denotá-la por

$$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Assim, ao considerarmos funções logarítmicas $\log_a, \log_b, \ldots$, fica implícito que os números reais $a, b, \ldots$ são positivos e diferentes de 1.

Lembre que a função exponencial de base a é crescente ou decrescente conforme se tenha $a > 1$ ou $0 < a < 1$, respectivamente. Como a inversa de uma bijeção crescente (resp. decrescente) também é crescente (resp. decrescente), concluímos que $\log_a$ é crescente se $a > 1$, e decrescente caso $0 < a < 1$.

1.1 Propriedades

As propriedades das funções logarítmicas seguem das propriedades já estudadas para o logaritmo. Convém iniciarmos com a principal delas, qual seja, *funções logarítmicas transformam produtos em somas*:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall\, x, y > 0. \tag{1}$$

Mais adiante, no Teorema 7, veremos que essa propriedade caracteriza as funções logarítmicas.

Para o exemplo a seguir, recorde a *desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números reais* (cf. Observação 3 do material referente à aula *Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos*, do módulo *Introdução à Função Quadrática*, do nono ano):

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \forall\, a, b > 0, \tag{2}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a = b$.

Exemplo 1. *Calcule o valor máximo da função* $f : (7{,}11) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \log_8(x-7) + \log_8(11-x)$.

Solução. O valor máximo é $2/3$, assumido em $x = 9$. De fato, primeiro observe que (1) nos permite escrever $f(x) = \log_8[(x-7)(11-x)]$. Fazendo $a = x - 7$ e $b = 11 - x$ em (2), e lembrando que $\log_8$ é uma função crescente, vem

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_8[(x-7)(11-x)] \\ &\leq \log_8\left[\frac{(x-7)+(11-x)}{2}\right]^2 \\ &= \log_8 4 = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

com igualdade se, e só se, $x - 7 = 11 - x \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9$. $\square$

A próxima propriedade, conhecida como a *fórmula de mudança de base*, permite relacionar funções logarítmicas de bases diferentes:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \forall\, x > 0. \tag{3}$$

De fato, a partir dessa relação vemos que as funções logarítmicas $\log_a$ e $\log_b$ diferem pelo fator $\frac{1}{\log_b a}$.

Uma consequência simples de (3), que utilizaremos mais adiante, é a fórmula

$$\log_c d = \frac{1}{\log_d c}, \tag{4}$$

válida para reais positivos c e d diferentes de 1. De fato, segue da fórmula de mudança de base que

$$\log_c d = \frac{\log_d d}{\log_d c} = \frac{1}{\log_d c}.$$

Inspirados pela propriedade (1), é natural indagar se existe alguma relação entre as funções $\log_{ab}$, $\log_a$ e $\log_b$. O próximo exemplo mostrará que, como funções, tem-se

$$\log_{ab} \cdot (\log_a + \log_b) = \log_a \cdot \log_b .$$

Exemplo 2. *Mostre que*

$$\log_{ab} x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}, \tag{5}$$

para cada real positivo x diferente de 1.

Solução. Segue de (4) que

$$\begin{aligned}
\log_{ab} x\,(\log_a x + \log_b x) &= \log_{ab} x \left(\frac{1}{\log_x a} + \frac{1}{\log_x b} \right) \\
&= \log_{ab} x \left(\frac{\log_x a + \log_x b}{\log_x a \cdot \log_x b} \right) \\
&= \log_{ab} x \left(\frac{\log_x (ab)}{\log_x a \cdot \log_x b} \right) \\
&= \frac{1}{\cancel{\log_x (ab)}} \left(\frac{\cancel{\log_x (ab)}}{\log_x a \cdot \log_x b} \right) \\
&= \frac{1}{\log_x a} \cdot \frac{1}{\log_x b} \\
&= \log_a x \cdot \log_b x.
\end{aligned}$$

Como $x \neq 1$, temos $\log_a x \cdot \log_b x \neq 0$. Consequentemente, a igualdade deduzida acima garante que $\log_a x + \log_b x \neq 0$, de sorte que a relação desejada é obtida dividindo-se ambos os membros da referida igualdade anterior por $\log_a x + \log_b x$. $\square$

A partir da propriedade (1), vemos que *qualquer função logarítmica transforma um quociente numa diferença*:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \forall\, x, y > 0. \tag{6}$$

Isto segue de que

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a \left(\frac{x}{y}\right) + \log_a y.$$

Exemplo 3. *Se* $\log_a 2021 - \log_b 2021 = \log_{\frac{b}{a}} 2021$*, determine os possíveis valores de* $\log_a b$*.*

Solução. A ideia é escrever ambos os membros da igualdade proposta em termos de valores da função logarítmica de base 2021. Faremos isto com o auxílio das propriedades (3) (e (4), em particular) e (6).

Para o primeiro membro,

$$\begin{aligned}\log_a 2021 - \log_b 2021 &= \left(\frac{1}{\log_{2021} a} - \frac{1}{\log_{2021} b}\right)\\ &= \left(\frac{\log_{2021} b - \log_{2021} a}{\log_{2021} a \cdot \log_{2021} b}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Para o segundo,

$$\log_{\frac{b}{a}} 2021 = \frac{1}{\log_{2021}(\frac{b}{a})} = \frac{1}{\log_{2021} b - \log_{2021} a}. \tag{8}$$

Fazendo $u = \log_{2021} a$ e $v = \log_{2021} b$, a hipótese do problema, juntamente com (7) e (8), dizem que

$$\frac{v-u}{uv} = \frac{1}{v-u}.$$

Por outro lado, queremos calcular os possíveis valores de

$$\log_a b = \frac{\log_{2021} b}{\log_{2021} a} = \frac{v}{u}.$$

Ora,

$$\begin{aligned}\frac{v-u}{uv} = \frac{1}{v-u} &\Leftrightarrow (v-u)^2 = uv \\ &\Leftrightarrow v^2 - 3uv + u^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{v}{u}\right)^2 - 3\left(\frac{v}{u}\right) + 1 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{v}{u}$ é uma raiz da equação quadrática $X^2 - 3X + 1 = 0$, e a fórmula de Bhaskara dá $\log_a b = \frac{v}{u} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. $\square$

A propriedade (1) permanece válida para qualquer quantidade finita de fatores:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n,$$

para todos os números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Em particular, se todos estes n números forem iguais a x, obtemos

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

(Mais geralmente, veja a propriedade (9)).

Exemplo 4. *Mostre que uma função logarítmica transforma progressões geométricas de termos positivos em progressões aritméticas.*

Solução. Se $(y_n)_{n\geq 1}$ é uma progressão geométrica de termos positivos, queremos mostrar que a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$, definida por $x_n = \log_a y_n$, é uma progressão aritmética.

Com efeito, se q é a razão daquela PG, temos $q > 0$ e $y_n = y_1 q^{n-1}$, para cada natural n. Portanto,

$$\begin{aligned}x_n = \log_a y_n &= \log_a(y_1 q^{n-1}) \\ &= \log_a y_1 + \log_a q^{n-1} \\ &= \log_a y_1 + (n-1)\log_a q,\end{aligned}$$

de forma que $(x_n)_{n\geq 1}$ é a PA de primeiro termo $\log_a y_1$ e razão $\log_a q$. $\square$

É importante observar que *a composta de uma função exponencial com uma função logarítmica é uma função linear.* Mais precisamente,

$$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a b, \quad \forall\, b > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

uma vez que

$$\log_a(b^x) = \frac{\log_b(b^x)}{\log_b a} = \frac{x}{\log_b a} = x \cdot \log_a b.$$

A partir daí e de (4), segue a seguinte propriedade:

$$\log_{b^c} x = \frac{1}{c} \cdot \log_b x, \quad \forall\, x > 0, \forall\, c \in \mathbb{R}^*. \tag{10}$$

Isso porque

$$\log_{b^c} x = \frac{1}{\log_x b^c} = \frac{1}{c \log_x b} = \frac{1}{c}\frac{1}{\log_x b} = \frac{1}{c} \log_b x.$$

Reciprocamente a (9), temos a seguinte

Proposição 5. *Se a composta de uma função exponencial com uma função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ for uma função linear não identicamente nula, então f é uma função logarítmica.*

Demonstração. Suponhamos $f(b^x) = kx$, para cada número real x, sendo $0 < b \neq 1$ e $k \neq 0$ constantes. Como a função $\log_b$ é a inversa da função exponencial de base b, vale $b^{\log_b x} = x$, para todo $x > 0$. Portanto,

$$f(x) = f(b^{\log_b x}) = k \log_b x = \log_{b^{1/k}} x,$$

para cada $x \in (0, +\infty)$, em que a propriedade (10) foi utilizada na última igualdade (com $m = 1/k$). Se $a = b^{1/k}$, provamos acima que $f(x) = \log_a x$, para todo $x > 0$, ou seja, $f = \log_a$. $\square$

1.2 Caracterizando a função logarítmica

Necessitaremos do seguinte resultado (para uma demonstração, veja a referência [1]):

Teorema 6. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) *g é uma função linear, ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = kx, \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.*

(*b*) *g satisfaz a* equação de Cauchy*:*

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Como prometido, vejamos que a propriedade de transformar produtos em somas (1) é, essencialmente, exclusiva das funções logarítmicas.

Teorema 7 (caracterização das funções logarítmicas). *Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente satisfazendo a relação $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todos os números reais positivos x e y. Então, f é uma função logarítmica.*

Demonstração. A ideia é a seguinte: se f *for* uma função logarítmica, então, graças a (9), a expressão $f(2^x)$ é linear em x; pensando inversamente, se f é uma função satisfazendo as condições do enunciado, seria interessante mostrar que a regra $x \mapsto f(2^x)$ define uma função linear, e é aí que entrará o Teorema 6. Uma vez feito isto, a conclusão desejada será imediata.

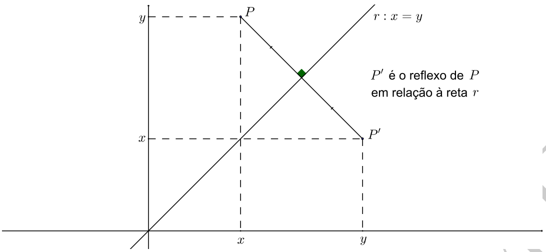
Traçado o plano, vamos à execução. Defina uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(2^x)$. Como a função exponencial de base 2 é crescente, g será crescente ou decrescente conforme f seja crescente ou decrescente. Agora veja que

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(2^{x+y}) = f(2^x \cdot 2^y) \\ &= f(2^x) + f(2^y) \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam os números reais x e y. Portanto, pelo Teorema 6 (mais precisamente, (b) $\Rightarrow$ (a)), concluímos que g é uma função linear. Como f não é identicamente nula (pois é crescente ou decrescente), o mesmo sucede com g. Então, a Proposição 5 garante que f é uma função logarítmica, como queríamos. $\square$

2 O gráfico da função logarítmica

Seja r a diagonal dos quadrantes ímpares, isto é, a reta de equação $x = y$. A transformação do plano que leva o ponto $P = (x,y)$ no ponto $P' = (y,x)$ é a *reflexão em torno da reta* r.



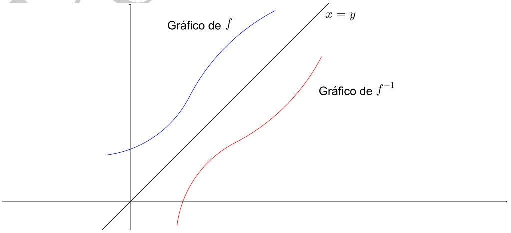
Considere, agora, uma bijeção $f : A \to B$, com $A,B \subset \mathbb{R}$. Já observamos anteriormente que sua inversa $f^{-1} : B \to A$ fica determinada pela condição

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \quad \forall\ x \in A, y \in B.$$

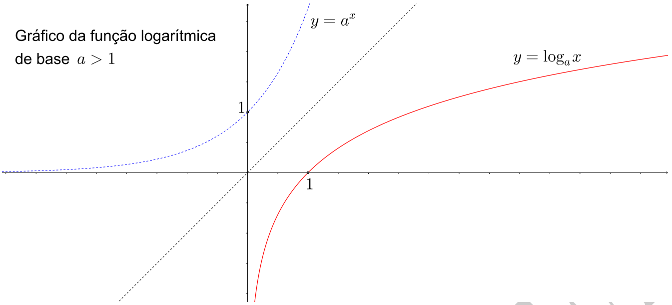
Em termos de gráficos, isso significa que

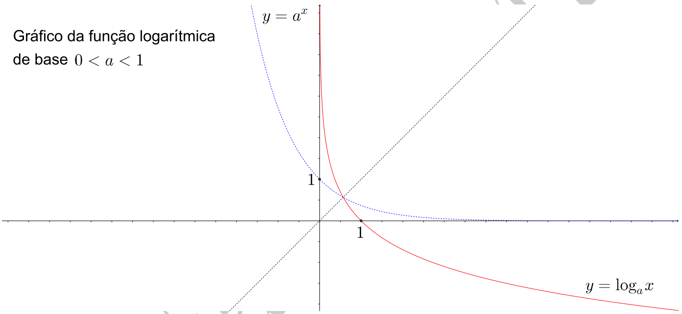
$$(y,x) \in \mathrm{Graf}(f^{-1}) \Leftrightarrow (x,y) \in \mathrm{Graf}(f). \qquad (11)$$

Portanto, a equivalência (11) garante que o gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta r, ou seja, *os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à diagonal dos quadrantes ímpares*:



Graças à discussão acima, podemos obter o gráfico da função logarítmica de base a refletindo o gráfico da função exponencial de base a em torno da diagonal $x = y$. Na figura a seguir, esboçamos os casos $a > 1$ e $0 < a < 1$:



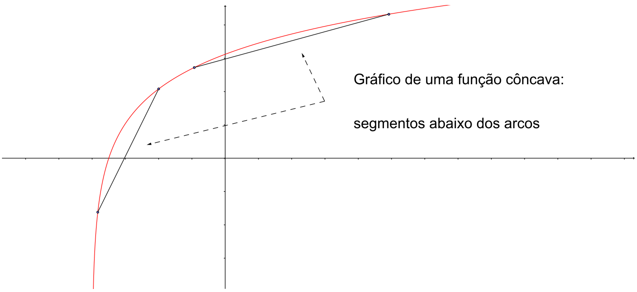


Gostaríamos, agora, de discutir rigorosamente o seguinte aspecto intuitivo do gráfico da função $\log_a$:

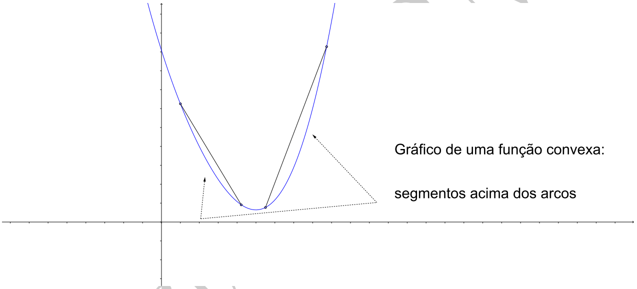
Toda função logarítmica de base maior que 1 *tem gráfico com concavidade para baixo e toda função logarítmica de base menor do que* 1 *tem gráfico com concavidade para cima.*

Para tanto, precisamos de algumas definições.

Se I é um intervalo da reta, diremos que o gráfico da função $f : I \to \mathbb{R}$ tem *concavidade para baixo* se cada arco do gráfico de f se situa *acima* do segmento de reta com mesmos extremos. Uma função é dita *côncava* se o seu gráfico é côncavo para baixo. A próxima figura traz o gráfico de uma função côncava.



Analogamente, o gráfico de f tem *concavidade para cima* se todo arco do gráfico de f se situa *abaixo* do segmento de reta com mesmos extremos, e uma função cujo gráfico tem concavidade para cima chama-se *convexa*. Veja um tal gráfico na figura a seguir.



Assim, por exemplo, o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, x \in \mathbb{R}$, tem concavidade para cima se $a > 0$, e concavidade para baixo caso $a < 0$. De outro modo,

$$f \text{ é convexa } \Leftrightarrow a > 0 \quad \text{e} \quad f \text{ é côncava } \Leftrightarrow a < 0.$$

Agora seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função côncava. Dados $a, b \in I$, sabemos que o arco do gráfico de f com extremidades $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ está situado acima do segmento de reta com mesmas extremidades. Em particular, o ponto médio $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ desse segmento [1] está situado abaixo

[1]Veja uma prova da fórmula do ponto médio na referência [2].

do ponto correspondente no gráfico, a saber, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Concluímos, então, que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{12}$$

quaisquer que sejam os pontos $a, b \in I$.

De forma análoga, se f é convexa, temos

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{13}$$

para $a, b \in I$ arbitrários.

Reciprocamente, se a desigualdade (12) (resp. (13)) se verifica, pode-se concluir que f é côncava (resp. convexa) mediante a adição de uma hipótese, conforme a seguinte

Proposição 8. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Então:*

(a) *f é côncava se, e somente se, a desigualdade* (12) *ocorre para quaisquer pontos $a, b \in I$.*

(b) *f é convexa se, e somente se, a desigualdade* (13) *ocorre para quaisquer pontos $a, b \in I$.*

A partir daí, temos o seguinte

Corolário 9. *A função logarítmica $\log_a$ é côncava se $a > 1$ e convexa se $0 < a < 1$.*

Demonstração. Vejamos o argumento se $a > 1$, caso em que $\log_a$ é crescente.

Se x e y são números reais positivos quaisquer, vimos em (2) que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geq \log_a(\sqrt{xy}) = \log_a((xy)^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}\log_a(xy) = \frac{\log_a x + \log_a y}{2}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 8, $\log_a$ é côncava.

A demonstração de que $\log_a$ é convexa caso $0 < a < 1$ segue as mesmas linhas, notando agora que $\log_a$ é decrescente. Isto nos levará à desigualdade

$$\log_a\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\log_a x + \log_a y}{2}, \forall\, x, y > 0,$$

com a qual a convexidade de $\log_a$ segue da Proposição 8. $\square$

Dicas para o Professor

Duas ou três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material. Observando os gráficos das funções exponenciais, percebemos que tais funções devem ser convexas, ou seja, o gráfico de qualquer função exponencial tem concavidade para cima. O professor pode justificar este fato aos seus alunos utilizando as mesmas ideias empregadas para demonstrar o Corolário 9.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 1.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.