Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Continuidades Laterais e em um Intervalo

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de Março de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Na aula anterior, tratamos da noção de função contínua, apresentando sua definição e discutindo vários exemplos.

Nesta aula, desenvolveremos resultados importantes para a classe das funções contínuas *definidas em intervalos*. Destaques ao *teorema do valor intermediário* 1 e ao *teorema dos valores extremos* 9.

Encerraremos com resultados de caracterização das funções exponenciais e logarítmicas.

1 Funções contínuas em intervalos

1.1 O Teorema do Valor Intermediário

O importante teorema que segue dá nome à subseção.

Teorema 1 (TVI). *Sejam I um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e d um valor intermediário da imagem de f, isto é, $f(a) < d < f(b)$, para certos pontos $a,b \in I$. Então, existe um ponto c no intervalo aberto de extremos a e b satisfazendo $f(c) = d$.*

Prova. Suponhamos, por contradição, $f(x) \neq d$, para cada $x \in [a,b]$ (não há perda de generalidade em supor $a < b$). Assim, pelos resultados da aula anterior, a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \frac{f(x) - d}{|f(x) - d|},$$

(está bem definida e) é contínua. Além disso, a imagem de h é o conjunto $\{-1,1\}$, pois $y/|y| \in \{-1,1\}$, para cada $y \neq 0$ (agora faça $y = (f(x) - d)/(|f(x) - d|)$), enquanto

$$h(a) = -1 \neq 1 = h(b). \tag{1}$$

Afirmação: h é localmente constante.

De fato, dado $x_0 \in [a,b]$ com, digamos, $h(x_0) = 1$, a desigualdade $-1 < h(x_0)$ implica, pela proposição 23 da aula anterior, $-1 < h(x)$, para todo $x \in J \cap [a,b]$, sendo J um intervalo aberto suficientemente pequeno centrado em x_0.

Como a função h assume apenas os valores -1 ou 1, deve ser $h(x) = 1$, para todo $x \in J \cap [a,b]$, justificando a afirmação.

Pelo exemplo 1 da aula *Continuidade em um ponto - Parte II* desse módulo, conclui-se que h é uma função constante, contradizendo (1). $\square$

Pelo TVI e pela proposição 14 da aula citada ao final da prova anterior, segue o

Corolário 2. *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ (a imagem de f) também é um intervalo.*

Para efeito de ilustração do corolário acima, tome uma função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_j x^j$. Para as conclusões finais, não há perda de generalidade em supor a_n, o coeficiente líder de p, positivo. Desse modo, *se o grau n de p for ímpar, então*

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \tag{2}$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty. \tag{3}$$

Com efeito, observando que n ímpar implica $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} p(x) &= \lim_{x \to -\infty} x^n \cdot \frac{p(x)}{x^n} \\
&= \lim_{x \to -\infty} x^n \cdot \lim_{x \to -\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) \\
&= -\infty \cdot a_n = -\infty,
\end{aligned}$$

pois $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^j} = 0$, para cada $j \geq 1$. Isso demonstra (2), e a justificativa da relação (3) é análoga.

Pelo corolário anterior (e lembrando que funções polinomiais são contínuas), a imagem da função polinomial p é um intervalo, ilimitado inferior e superiormente, por (2) e (3). Logo, $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, demonstrando que *toda função polinomial de grau ímpar é sobrejetora.* Em particular, $0 \in p(\mathbb{R})$, nos levando ao próximo

Exemplo 3. *Toda função polinomial de grau ímpar admite alguma raiz real.*

Exemplo 4. *Mostre que a equação* $x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 4 = 0$ *admite pelo menos duas raízes reais (distintas).*

Solução. Como a soma dos coeficientes dos monômios no 1º membro é nula, segue-se que 1 é uma raiz da equação. Portanto, o polinômio $x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 4$ é divisível por $x - 1$ e, de fato, um cálculo simples justifica a fatoração $x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 4 = (x-1)(x^3 - 3x + 4)$. Pelo exemplo anterior, a equação $x^3 - 3x + 4 = 0$ admite uma raiz real a (necessariamente diferente de 1), de forma que 1 e a são raízes da equação proposta. $\square$

Sugerimos ao leitor comparar o próximo exemplo com o exemplo 14 da aula *Continuidade em um ponto - Parte I*.

Exemplo 5. *Mostre que toda função contínua* $f : [a,b] \to [a,b]$ *admite um ponto fixo* $c \in [a,b]$*, isto é, tal que* $f(c) = c$*.*

Prova. Um ponto fixo c da função f nada mais é que uma raiz da equação $f(x) - x = 0$. Isso nos sugere definir a função $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ pondo $\phi(x) = f(x) - x$. Sendo uma diferença de funções contínuas, ϕ é contínua. Além disso, $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ e $\phi(b) = f(b) - b \leq 0$, em que a validade da igualdade em qualquer uma dessas desigualdades encerra a demonstração ($\phi(a) = 0$ [resp. $\phi(b) = 0$] significa que a [resp. b] é um ponto fixo de f). Portanto, podemos supor $\phi(b) < 0 < \phi(a)$ e, daí, o TVI garante a existência de um ponto $c \in (a,b)$ tal que $\phi(c) = 0$, ou melhor, $f(c) = c$. $\square$

Para mais uma aplicação do TVI, considere a equação $x^2 = 2^x$, admitindo 2 e 4 como raízes. É possível mostrar que esses números são as únicas soluções positivas da equação (veja a lista de exercícios da seção 4.6 da referência [3]). Todavia, estabeleceremos agora a existência de um único número real *negativo* c tal que $c^2 = 2^c$, determinando, assim, o conjunto solução da equação $x^2 = 2^x$ como $\{c,2,4\}$.

Com efeito, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2^x - x^2$, é contínua e

$$f(-1) = -\frac{1}{2} < 0 < 1 = f(0).$$

Pelo TVI, existe um número real $c \in (-1{,}0)$ satisfazendo $f(c) = 0$, isto é, $c^2 = 2^c$. Além disso, c é o *único* zero negativo da função f, pois $f|(-\infty{,}0]$, sendo a soma das funções crescentes (definidas pelas regras) $(-\infty{,}0] \ni x \to 2^x$ e $(-\infty{,}0] \ni x \to -x^2$, também é crescente.

Observação 6. *Em relação à raiz negativa c da equação $x^2 = 2^x$, afirmamos que c é* irracional*. De fato, se c fosse racional, teríamos $c = -p/q$ para certos inteiros positivos e primos entre si p, q. Daí, $(-p/q)^2 = 2^{-p/q}$ implicaria $p^2/q^2 = 1/2^{p/q}$, de forma que $2^{p/q}p^2 = q^2$, ou ainda, $2^p p^{2q} = q^{2q}$. A igualdade anterior mostra que, se p admite um fator primo, esse fator também é um divisor de q. Portanto, sendo p e q primos entre si, a única alternativa é $p = 1$. Daí, valeria $2 = q^{2q}$, uma igualdade impossível, pois $q \geq 2 \Rightarrow q^{2q} \geq 16$.*

1.2 O teorema dos valores extremos

O resultado principal desta subseção exige alguns fatos preliminares.

Sejam $f : [a{,}b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $J = f(I)$. A seguir, definiremos uma *inversa à direita* [1] $g : J \to [a{,}b]$ para a função f.

De acordo com o exemplo 24 da aula anterior, para cada $y \in J$ existe uma solução mínima $g(y) \in [a{,}b]$ da equação $f(x) = y$. Isso define uma função $g : J \to [a{,}b]$, chamada *inversa menor (à direita)* de f. Evidentemente, vale

$$f(g(y)) = y, \tag{4}$$

para cada $y \in J$. Em particular, g é injetiva e, caso f também seja injetiva, g é a inversa de $f : [a{,}b] \to J$.

[1] Vide seção 2 da aula *Composição de Funções* do módulo de *Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 1.*

Para melhor compreender a inversa menor g, admita que haja uma fonte luminosa à esquerda do gráfico da função f. Então, a parte iluminada do gráfico de f determina o gráfico da função g.

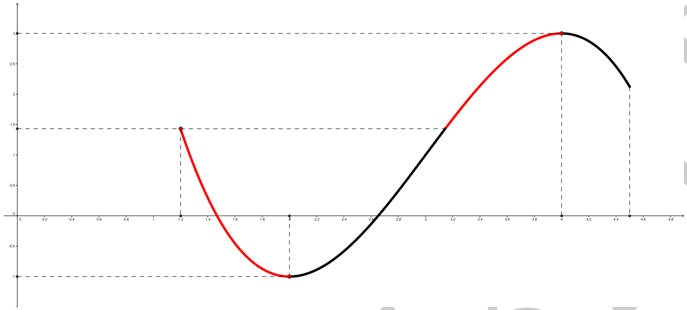

Figura 1: gráfico de uma função real e contínua f, definida no invervalo $[6/5{,}9/2]$; a parte "iluminada", em vermelho, quando refletida em relação à diagonal dos quadrantes ímpares, gera o gráfico da inversa menor de f.

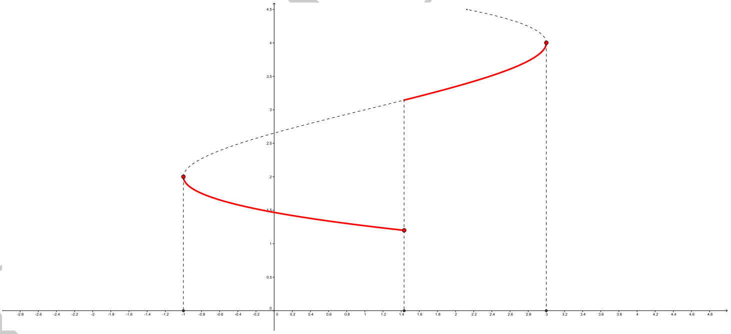

Figura 2: gráfico da inversa menor de f.

Nas notações acima, $J = f(I)$ é um intervalo, pelo corolário 2. Daí, $J^- = \{y \in J \,|\, y \leq f(a)\}$ e $J^+ = \{y \in J \,|\, y \geq f(a)\}$ também são intervalos.

Proposição 7. *g é decrescente em J^- e crescente em J^+* [2]*.*

Prova. Digamos que J^- não se reduza ao ponto $f(a)$ e sejam $y, z \in J^-$ tais que $y < z < f(a)$. Provaremos que $g(y) > g(z) > a$, estabelecendo a monotonicidade anunciada de $g|J^-$. Primeiramente, para cada $w \in J^- \setminus \{f(a)\}$,

$$f(g(w)) = w \neq f(a) \Rightarrow g(w) \neq a,$$

de modo que $g(w) > a$ (lembre: o contradomínio de g é o intervalo $[a,b]$).

Por outro lado, as desigualdades $y = f(g(y)) < z < f(a)$, juntamente com o TVI, garantem a existência de $x_0 \in (a,g(y))$ tal que $f(x_0) = z$. Sendo $g(z)$ a menor raiz da equação $f(x) = z$, conclui-se a relação $g(z) \leq x_0$, de onde segue a desigualdade desejada $g(z) < g(y)$.

Invertendo alguns sinais de desigualdades no argumento acima, prova-se que $g|J^+$ é crescente. $\square$

Observação 8. *Nas notações da discussão acima, quando J^- e J^+ são intervalos não degenerados, existem $x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que $f(x_0) < f(a) < f(x_1)$. Pelo TVI, existe um ponto c no interior do intervalo fechado de extremos x_0 e x_1 tal que $f(c) = f(a)$. Como $a < x_0,x_1$, vem que $a < c$ e, daí, f* não *é injetiva.*

Pela contrapositiva, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for injetiva, então $J^- = J$ ou $J^+ = J$ e, em qualquer caso, a inversa $g : J \to [a,b]$ de f é estritamente monótona, pela proposição anterior. Segue que f também é estritamente monótona, fato que será útil na solução do exemplo 15.

Agora, sejam $\alpha = \inf J$ e $\beta = \sup J$ [3] os extremos do intervalo J [4]. Como $g|J^-$ e $g|J^+$ são monótonas pela proposição anterior, o teorema 8 da aula *Limites Laterais* do

[2] Compare com a figura 2.

[3] Para seguir no argumento, convencionaremos $\alpha = -\infty$ (resp. $\beta = +\infty$) caso J seja ilimitado inferiormente (resp. superiormente). Todavia, *a posteriori*, veremos que α e β são números reais.

[4] Naturalmente, α (resp. β) é o extremo inferior (resp. superior) do intervalo J^- (resp. J^+).

módulo *Leis do Limite - Parte 2* (vide também a observação 10 dessa aula) garante a existência dos limites laterais

$$\lim_{y\to\alpha^+} g(y) =: c$$

e

$$\lim_{y\to\beta^-} g(y) =: d.$$

Mais ainda, uma vez que $g(y) \in [a,b]$ para cada $y \in J$, não é difícil concluir as pertinências $c, d \in [a,b]$ (por exemplo, pela permanência do sinal). Portanto, fazendo $y \to \alpha^+$ em (4) e levando em consideração o teorema 20 da aula anterior [5], vem que

$$f(c) = f(\lim_{y\to\alpha^+} g(y)) = \lim_{y\to\alpha^+} f(g(y)) = \lim_{y\to\alpha^+} y = \alpha.$$

De forma análoga prova-se a igualdade $f(d) = \beta$, fatos que garantem as pertinências $\alpha, \beta \in J$, ou seja, α e β são o menor e maior valores da função f, respectivamente. Daí, segue o

Teorema 9 (dos valores extremos). *Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ assume valores extremos, ou seja, existem $c, d \in [a,b]$ tais que $f(c) \le f(x) \le f(d)$, para todo $x \in [a,b]$.*

Observação 10. *Nas notações do teorema 9 e levando em conta o corolário 2, concluímos que a imagem da função f é o intervalo $[f(c),f(d)]$.*

Exemplo 11. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica. Mostre que, para algum número real a, vale $f(a+2023) = f(a)$.*

Prova. Se $T > 0$ é um período para a função f, o teorema 9 assegura a existência de $c, d \in [0,T]$ tais que $f(c)$ e $f(d)$ são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f restrita ao intervalo $[0,T]$. Por outro lado, f e a restrição $f|[0,T]$ têm

[5] O qual, como se verifica facilmente, também vale para limites no infinito.

a mesma imagem, de sorte que $f(c)$ e $f(d)$ são os valores mínimo e máximo da função f, ou seja, vale

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d),$$

para *todo* número real x. Em particular,

$$f(c) \leq f(c + 2023) \tag{5}$$

e

$$f(d + 2023) \leq f(d). \tag{6}$$

Assim, se ocorrer a igualdade em (5) ou (6), basta tomar $a = c$ ou $a = d$, respectivamente.

Caso contrário, definimos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - f(x+2023)$, de modo que g é contínua e, pelas versões restritas de (5), (6), vale $g(c) < 0 < g(d)$. Apelando ao TVI, concluímos a existência de $a \in (c,d)$ satisfazendo $g(a) = 0$, isto é, $f(a + 2023) = f(a)$. $\square$

1.3 Continuidade da inversa

Teorema 12. *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é estritamente monótona, então sua inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ é contínua.*

Prova. Seja $J = f(I)$ e digamos que $f : I \to \mathbb{R}$ seja crescente, de modo que $f^{-1} : J \to I$ também é crescente. Provaremos a continuidade de f^{-1} em um ponto $y_0 = f(x_0) \in J$ estabelecendo a igualdade

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = y_0. \tag{7}$$

Faremos isso supondo que y_0 é um ponto interior ao intervalo J (os casos em que y_0 é um dos extremos de J não oferecem maiores dificuldades).

Sendo f^{-1} monótona, sabemos que existem os limites laterais $\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y)$ e $\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y)$. Considerando a mudança de variável $y = f(x)$ e notando que $y \to y_0^-$ quando $x \to x_0^-$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) &= \lim_{x \to x_0^-} f^{-1}(f(x)) \\ &= \lim_{x \to x_0^-} x \\ &= x_0 = f^{-1}(y_0);\end{aligned}$$

de forma similar, $\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Dessas relações, segue a igualdade (7), o que prova a continuidade da inversa f^{-1}. $\square$

Generalizando o exemplo 11 da aula anterior, temos o

Exemplo 13. *Se n é um número natural, a função raiz n-ésima $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$, é contínua.*

Prova. Com efeito, g é a inversa da função contínua e crescente $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^n$, sendo a sobrejetividade de f uma consequência do exemplo 15 da aula *Continuidade em um ponto - Parte II*. Portanto, a continuidade da função g segue do teorema (12). $\square$

Observação 14. *Se n é um número natural ímpar, os mesmos argumentos da solução do exemplo anterior asseguram a continuidade da função raiz n-ésima $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$.*

Tratando-se de funções contínuas definidas em intervalos, "injetividade" equivale a "monotonicidade estrita". É o que garante o próximo

Exemplo 15. *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e* injetiva*, prove que f é estritamente monótona. (Em particular, pelo teorema 12, $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua.)*

Prova. Sejam $u < v$ pontos distintos do intervalo I. Se, digamos,

$$f(u) < f(v), \tag{8}$$

afirmamos que f é crescente. De fato, dados $x < y$ em I, precisamos provar a desigualdade

$$f(x) < f(y). \tag{9}$$

Para isso, sejam $a = \min\{u,x\}$ e $b = \max\{v,y\}$, de forma que $\{u,v,x,y\} \subset [a,b] \subset I$. Pela observação 8, a restrição $f|[a,b]$ é estritamente monótona, de forma que $f|[a,b]$ é crescente por (8), e isso implica (9).

Se, por outro lado, tivéssemos $f(u) > f(v)$, provaríamos por argumentos similares que f seria decrescente.

Sendo a igualdade $f(u) = f(v)$ impossível pela injetividade da função f, a demonstração está encerrada. □

2 Funções logarítmicas

Começaremos com duas observações: se a é um número real maior que 1, então

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \tag{10}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty. \tag{11}$$

Com efeito, sendo $a > 1$, a função exponencial de base a é crescente, de sorte que existem os limites $L = \lim_{x\to-\infty} a^x$ e $M = \lim_{x\to+\infty} a^x$. Notando que $x = 2u \to -\infty$ quando $u \to -\infty$, o teorema da mudança de variável no limite dá

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{u\to-\infty} a^{2u} \\ &= \lim_{u\to-\infty} (a^u)^2 = (\lim_{u\to-\infty} a^u)^2 \\ &= L^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $x \to -\infty$ na desigualdade $a^x \leq a^{-1}$, válida para cada $x \leq -1$, obtemos $L \leq a^{-1}$, pela permanência do sinal. Como $a^{-1} < 1$, as relações $L^2 = L$ e $L < 1$ implicam $L = 0$, justificando (10). Quanto a igualdade (11), basta notar que $x = -t \to +\infty$ quando $t \to -\infty$, de forma que

$$M = \lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{t \to -\infty} a^{-t} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{a^t} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Das igualdades acima, é fácil concluir as relações

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \tag{12}$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \tag{13}$$

caso tenhamos $0 < a < 1$.

Das relações (10), (11), (12) e (13) segue a

Proposição 16. *A função exponencial de base* $a > 1$ *(resp.* $0 < a < 1$*) é uma bijeção contínua e crescente (resp. decrescente) da reta* $\mathbb{R}$ *sobre o intervalo* $(0, +\infty)$*.*

Prova. Se $f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é a função exponencial de base a, com $0 < a \neq 1$, basta provar, levando em conta as propriedades já conhecidas da função exponencial, que f_a é sobrejetiva.

Ora, pelo corolário 2, sabemos que $f_a(\mathbb{R})$ é um intervalo. Além disso, os pares de relações (10), (11) e (12), (13) garantem que 0 e $+\infty$ são os extremos de $f_a(\mathbb{R})$, ou seja, $f_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, como desejado. $\square$

Assim, quando $0 < a \neq 1$, a função exponencial de base a admite inversa, $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, chamada *função logarítmica de base a*. Por definição,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Perceba que $\log_a$ é uma bijeção do intervalo $(0, +\infty)$ sobre $\mathbb{R}$, tendo $\log_a$ o mesmo tipo de monotonicidade que a função exponencial de base a. Para mais propriedades das funções logarítmicas, veja o módulo de *Funções Logarítmicas*, 1º ano.

Aqui, estamos interessados na seguinte

Proposição 17. *Funções logarítmicas são contínuas.*

Prova. Segue imediatamente da continuidade e monotonicidade da função exponencial, de acordo com o teorema 12. □

Se e é o número de Euler (vide observação 21 da aula *Continuidade em um Ponto - Parte II*), a função logarítmica de base e chama-se *logaritmo natural* e costuma ser denotada por ln ou apenas log (sem referência à base).

Exemplo 18. *Sejam k um número real fixado e $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^k$. Mostre que f é contínua.*

Prova. A propriedade $\ln x^k = k \ln x$, válida para qualquer $x > 0$, permite escrever

$$x^k = e^{k \ln x}. \tag{14}$$

Assim, se exp denota a função exponencial de base e e $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = k \ln x$, a igualdade (14) se traduz na relação $f = \exp \circ g$. Como exp e g são contínuas, a continuidade de f é uma consequência direta do corolário 21 da aula anterior ("*a composta de funções contínuas também é contínua*"). □

3 Equações funcionais e continuidade

Na aula *Continuidade em um Ponto - Parte II*, vimos, através da proposição 12 e da observação 13, que funções *aditivas e monótonas* são lineares. O próximo exemplo mostrará que funções aditivas e *contínuas* também são lineares. Antes, contudo, precisaremos do

Lema 19. *Toda função contínua é localmente limitada.*

Prova. Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $a \in I$ [6]. Sendo $f(a) - 1 < f(a) < f(a) + 1$, a proposição 23 da aula anterior garante $f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$, para todo $x \in I$ suficientemente próximo de a, demonstrando que f é limitada na vizinhança do ponto a consistindo de tais x. □

[6] Aqui, como na aula anterior, I é uma reunião de intervalos (não degenerados).

Exemplo 20. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva, ou seja, tal que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

para quaisquer números reais x e y. Se f é contínua, então f é uma função linear: $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a = f(1)$.

Prova. Segue diretamente do lema anterior e da proposição 12 da aula *Continuidade em um Ponto - Parte II.* □

Nos próximos exemplos, obteremos caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas. Para tal, lembre-se de que funções exponenciais transformam somas em produtos, enquanto funções logarítmicas transformam produtos em somas.

Exemplo 21 (Caracterização das funções exponenciais). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não identicamente nula que transforma somas em produtos:*

$$f(x + y) = f(x)f(y),$$

para quaisquer números reais x, y. Se f é contínua, então $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo $a = f(1) > 0$.

Prova. Para começar, vejamos que $f(x) \neq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$. De fato, se tivéssemos $f(x_0) = 0$, para algum número real x_0, valeria

$$f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0,$$

para todo x, contradizendo a hipótese "f não é identicamente nula".

Assim, temos $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \big(f(\frac{x}{2})\big)^2 > 0$, para cada x, de forma que a regra $g(x) = \ln f(x)$ define uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Observe que g, sendo uma composta de funções contínuas, também é uma função contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} g(x + y) &= \ln f(x + y) = \ln(f(x)f(y)) \\ &= \ln f(x) + \ln f(y) \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

ou seja, g é aditiva. Pelo exemplo 20, segue que g é linear: $g(x) = bx$, para cada $x \in \mathbb{R}$ ($b = g(1)$). Daí, a relação $\ln f(x) = g(x)$ dá

$$f(x) = e^{g(x)} = e^{bx} = (e^b)^x = a^x,$$

para $a = e^b$, como queríamos. □

Exemplo 22 (Caracterização das funções logarítmicas). *Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função não identicamente nula que transforma produtos em somas:*

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

quaisquer que sejam os números reais x, y. Se f é contínua, então existe um número real positivo $a \neq 1$ tal que $f(x) = \log_a x$, para cada $x > 0$.

Prova. [7] O argumento é análogo à solução do exemplo anterior. De fato, agora definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(e^x)$, sendo g ainda contínua e aditiva (detalhes ao encargo do leitor). Apelando ao exemplo 20, conclui-se que g é linear, $g(x) = bx, x \in \mathbb{R}$, para $b \neq 0$, pois f não é identicamente nula. Portanto, $f(e^x) = bx$ implica

$$f(x) = f(e^{\ln x}) = b \ln x = \frac{\ln x}{\ln e^{1/b}} = \log_{e^{1/b}} x = \log_a x,$$

em que $0 < a = e^{1/b} \neq 1$, encerrando a solução. □

Observação 23. *Em complemento ao exemplo 18 e considerando o mesmo tipo de raciocínio empregado nos dois exemplos anteriores, podemos provar o seguinte fato:* se $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não identicamente nula que transforma produtos em produtos ($f(xy) = f(x)f(y)$, para quaisquer números reais x, y), então existe um número real k tal que $f(x) = x^k$, para todo $x > 0$.

[7] Compare com a demonstração do teorema 7 da aula *Logaritmo como uma Função* do módulo de *Função Logarítmica*.

Dicas para o Professor

Relativamente ao exemplo 4 e levando em consideração o exemplo 10 da aula *Funções Racionais* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*, pode-se provar que a é a única raiz real da equação $x^3 - 3x + 4 = 0$. Portanto, 1 e a são as únicas raízes reais da equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 4 = 0$.

Utilizando a *fórmula de Cardano-Tartaglia* (vide [2]), temos

$$a = \sqrt[3]{\sqrt{3} - 2} - \sqrt[3]{\sqrt{3} + 2}.$$

Ao contrário da raiz real a da equação $x^3 - 3x + 4 = 0$, a raiz negativa c da equação $x^2 = 2^x$ (tratada ao final da subseção 1.1) não pode ser expressa em termos de números inteiros e operações algébricas. Na verdade, c é um número *transcendente*: pesquise sobre o *teorema de Gelfond-Schneider*.

Os três resultados de caracterização expostos nos exemplos 21, 22 e na observação 23 ainda são verdadeiros com a hipótese "contínua" substituída por "estritamente monótona" (sendo redundante, nesse caso, a hipótese "não identicamente nula").

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

2. E. L. Lima. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

3. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo.* 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.