Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Leis do Limite - Parte 2

Funções Racionais

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Setembro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta aula de exercícios, apresentaremos alguns resultados e problemas relativos ao cálculo do limite de um quociente, $\lim\limits_{\sim} \frac{f(x)}{g(x)}$, sendo "$\sim$" qualquer uma das simbologias a seguir, $x \to a, x \to a^-$ ou $x \to a^+$.

No caso em que f/g é uma função racional, isto é, f e g são polinômios, seguirá da nossa discussão que qualquer limite lateral de f/g existe (ainda que seja infinito).

1 Funções racionais

De acordo com a Proposição 4 (um corolário da regra do quociente) da aula *Aplicação das Leis* do módulo anterior, se r é uma função racional, então $\lim\limits_{x\to a} r(x)$ pode ser calculado por meio de uma mera substituição, *caso a seja um ponto no domínio maximal de definição da função* r[1]: $\lim\limits_{x\to a} r(x) = r(a)$. Dessa forma, vejamos dois exemplos com ausência dessa hipótese simplificadora.

Exemplo 1. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$.

Solução. Perceba que o ponto 2 não pertence ao domínio maximal da função racional r definida por $r(x) = \frac{x^3-x^2-4}{x^2+3x-10}$, uma vez que aquele ponto é uma raiz do polinômio do denominador: $2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 0$. Isso nos impede de utilizar diretamente a regra do quociente. Por outro lado, como $2^3 - 2^2 - 4 = 0$, 2 também é uma raiz do polinômio do numerador, de sorte que $x - 2$ é um fator comum daqueles polinômios[2]. De fato, vale $x^3 - x^2 - 4 = (x-2)(x^2 + x + 2)$ e $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$, de modo que, para cada x no domínio de r (isto é, para cada $x \neq 2$), temos

$$\frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + x + 2)}{\cancel{(x-2)}(x+5)} = \frac{x^2 + x + 2}{x + 5}.$$

[1]Lembre-se de que, se $r = f/g$, então o domínio maximal D_r da função r consiste do complementar do conjunto das raízes de g, ou seja, $D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

[2]Vide, adiante, Teorema de D'Alembert.

Perceba que expressamos a função r em termos de uma função racional que, agora, admite 2 como um ponto no seu domínio (nesse caso, recuperamos a hipótese simplificadora!). Isso nos permite levar o cálculo adiante, por meio da regra da substituição:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-4}{x^2+3x-10} &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x+5}\\ &= \frac{2^2+2+2}{2+5}\\ &= \frac{8}{7}.\end{aligned}$$

□

Em geral, se f e g são polinômios tais que $f(a)=g(a)=0$, é possível obter fatorações $f(x)=(x-a)F(x)$ e $g(x)=(x-a)G(x)$, com F e G também polinômios; por sua vez, isso nos permite escrever

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}F(x)}{\cancel{(x-a)}G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)},$$

caso os limites existam.

A "técnica" acima se apoia no seguinte resultado, conhecido como o *teste da raiz*.

Teorema 2 (D'Alembert). *Um polinômio $p(x)$ admite o número real a como raiz se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x-a$. De outro modo, vale $p(a)=0$ se, e só se, existe um polinômio $P(x)$ tal que $p(x)=(x-a)P(x)$.*

Prova. Para todo j natural, temos a fatoração

$$x^j-a^j=(x-a)p_{j,a}(x),$$

em que $p_{j,a}(x)=\sum_{k=0}^{j-1}x^{j-1-k}a^k$. Realmente,

$$
\begin{aligned}
(x-a)p_{j,a}(x) &= (x-a)\sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k}a^k \\
&= x\sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k}a^k - a\sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k}a^k \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-k}a^k - \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k}a^{k+1} \\
&= x^j - a^j,
\end{aligned}
$$

uma vez que as demais parcelas dos dois somatórios cancelam-se. Portanto, se $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, temos

$$
\begin{aligned}
p(x) - p(a) &= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j - \sum_{j=0}^{n} a_j a^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j (x^j - a^j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j (x-a)p_{j,a}(x) \\
&= (x-a)\sum_{j=1}^{n} a_j p_{j,a}(x),
\end{aligned}
$$

de forma que $p(x) = (x-a)P(x) + p(a)$, em que $P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_{j,a}(x)$. Daí, é imediato que $p(a) = 0$ se, e somente se, $p(x) = (x-a)P(x)$. □

Corolário 3. *Se $p(x)$ é um polinômio não identicamente nulo e a é um número real, então existe um único inteiro não-negativo k para o qual $p(x) = (x-a)^k Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinômio satisfazendo $Q(a) \neq 0$.*

Prova. Seja n o grau do polinômio p. Se a não é uma raiz de p, tome $k = 0$ e $Q = p$. Se a é uma raiz de p, o conjunto A dos números naturais m tais que $(x-a)^m$ divide $p(x)$ é não-vazio, pois $1 \in A$, pelo Teorema de D'Alembert, e cada um dos seus elementos não supera n (*o grau do divisor não supera o grau do dividendo, se o dividendo não for identicamente nulo*). Portanto, o conjunto A admite um maior elemento k, de forma que $p(x) = (x-a)^k Q(x)$, para algum polinômio $Q(x)$. Só falta verificar que $Q(a) \neq 0$. Ora, se tivéssemos $Q(a) = 0$, o Teorema de D'Alembert nos permitiria escrever $Q(x) = (x-a)R(x)$, para algum polinômio $R(x)$, implicando $p(x) = (x-a)^{k+1}R(x)$, ou seja, $(x-a)^{k+1}$ dividiria $p(x)$, contradizendo a maximalidade de k. Portanto, $Q(a) \neq 0$, como queríamos. $\square$

Nas condições do corolário acima, diremos que k é a *multiplicidade* de a como uma raiz de $p(x)$[3], o que denotaremos por $k = m_{a,p}$. Para efeito de ilustração, em relação aos polinômios $f(x) = x^3 - x^2 - 4$ e $g(x) = x^2 + 3x - 10$, analisados no primeiro exemplo, encontramos $m_{2,f} = m_{2,g} = 1$.

Com essa terminologia, se f e g são polinômios, a discussão do limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se resume à análise das multiplicidades de a como raízes de f e g:

1. Se $m_{a,f} > m_{a,g}$, teremos $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (grosso modo, *quando $x \to a$, f tende a zero mais rapidamente que g*).

2. Caso as multiplicidades coincidam, $m_{a,f} = m_{a,g} = k$, o cancelamento do fator $(x-a)^k$ nos permitirá aplicar a regra da substituição (como no Exemplo (1)).

3. Se $m_{a,f} < m_{a,g}$, a aplicação do 1º caso implica $\frac{g(x)}{f(x)} \to 0$, quando $x \to a$, nos indicando que $\lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$. Como veremos abaixo, embora o limite bilateral $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ possa não existir, os limites laterais $\lim_{x\to a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)}$ existem e são infinitos.

[3]Perceba que as expressões "a é raiz de multiplicidade 0 de p" e "a não é raiz de p" são sinônimas.

O ponto 3 é o único que exige resultados auxiliares em seu tratamento. Retornaremos a essa questão logo após o

Exemplo 4. *Determine as assíntotas verticais para o gráfico da função f definida pela regra* $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-2x-3}$.

Solução. Lembre-se de que a reta vertical $x = a$ é uma assíntota vertical para o gráfico de f se algum limite lateral de f em a for infinito: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Sendo $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, temos que $\mathbb{R} \setminus \{-1{,}3\}$ é o domínio maximal de definição da função f, de onde segue que as *possíveis* assíntotas verticais para o gráfico de f são as retas $x = -1$ e $x = 3$.

Comecemos analisando o limite lateral à direita de f no ponto 3. Primeiramente, se $x > 3$, então o denominador $(x+1)(x-3)$ é positivo, ao mesmo tempo em que o numerador $1-x$ é negativo. Assim, pela regra dos sinais, $f(x)$ é negativo, para todo x maior que 3. Como $(x+1)(x-3)$ tende a 0 e $1-x$ tende a -2, quando $x \to 3^+$, *esperamos* que $|f(x)|$ tenda a $+\infty$ quando $x \to 3^+$, o que nos leva a conclusão de que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$, confirmando que a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical para o gráfico de f.

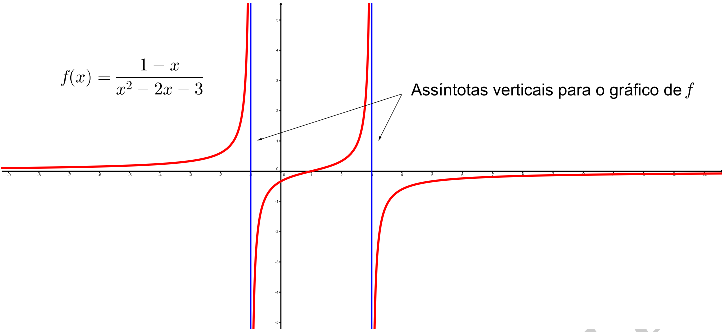
Muito embora justificar formalmente que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ não seja complicado, omitiremos tal justificativa aqui, pelo fato dela ser um caso particular do nosso próximo resultado, a saber, a Proposição 5.

De modo similar, podemos verificar que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ e, mais ainda, $\lim\limits_{x\to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$, de onde se vê que a reta $x = -1$ também é uma assíntota vertical para o gráfico de f.

Esboçamos tal gráfico na figura a seguir.

□

Proposição 5. *Sejam* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k \neq 0$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. *Suponhamos que, para todo x suficientemente próximo de a (e diferente de a), $g(x)$ tenha um mesmo sinal (positivo ou*



negativo). Assim, se $\sigma \in \{-,+\}$ é o sinal de $kg(x)$ (para aqueles x próximos de a), então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \sigma\infty.$$

Valem resultados análogos com limites laterais.

Se escrevemos $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ (resp. $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$) caso $g(x)$ tenda a 0 por valores positivos (resp. negativos), quando x tende ao ponto a, a proposição anterior nos sugere as seguintes convenções:

$$\frac{k}{0^+} = \begin{cases} +\infty, \text{ se } k > 0, \\ -\infty, \text{ se } k < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{k}{0^-} = \begin{cases} -\infty, \text{ se } k > 0, \\ +\infty, \text{ se } k < 0 \end{cases}.$$

É importante frisar que as expressões $\frac{k}{0^\pm}$ não têm sentido aritmético (são apenas abreviações), mas possibilitam estender a validade da regra do limite do quociente nas condições previstas na Proposição 5. Por exemplo, em referência à função $f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x-3}$ do exemplo anterior, temos $\lim_{x\to -1^+} \frac{1-x}{x^2-2x-3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$.

A proposição acima é uma consequência do resultado a seguir, uma versão para limites do seguinte fato intuitivo: *o inverso de uma quantidade cada vez menor é cada vez maior.*

Teorema 6. *Suponhamos que h seja uma função definida num intervalo aberto perfurado $I \setminus \{a\}$, com $h(x) > 0$, para cada $x \in I \setminus \{a\}$. Então,*

$$\lim_{x\to a} h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{h(x)} = +\infty.$$

Analogamente, se $h(x) < 0$, para cada $x \in I \setminus \{a\}$, então,

$$\lim_{x\to a} h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{h(x)} = -\infty.$$

Ademais, valem resultados similares com limites laterais.

Prova. Vamos utilizar a definição de limite, provando que, se h é positiva em $I \setminus \{a\}$, então $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{h(x)} = +\infty$. (A validade dos demais limites pode ser estabelecida de modo análogo.)

Para tal, devemos verificar que, dado $M > 0$ arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que $x \in I, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{h(x)} > M$. Ora, como h é positiva, a desigualdade $\frac{1}{h(x)} > M$ equivale a $h(x) < \frac{1}{M}$. Sendo $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, tomamos $\varepsilon = 1/M$ na definição de limite para obter $\delta > 0$ satisfazendo $x \in I, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |h(x) - 0| < \frac{1}{M}$, ou seja, $x \in I, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{h(x)} > M$, como queríamos. □

Prova da Proposição 5. Para fixar as ideias, podemos supor que k é negativo e $g(x)$ é positivo, para todo x suficientemente próximo de a (com $x \neq a$). Devemos, então, provar que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Primeiramente, tomando $h = g/f$, afirmamos que $h(x) < 0$, para todo x suficientemente próximo de a. Com efeito, como $\lim_{x\to a} f(x) = k < 0$, o lema de permanência do sinal (veja o Lema 4 da aula *Leis do Limite - Parte 1*) nos garante que $f(x) < 0$, para todo x suficientemente próximo de a, de onde segue a afirmação. Pela regra do quociente, vem $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, o que, pelo teorema anterior, nos dá $\lim_{x\to a} \frac{1}{h(x)} = -\infty$, isto é, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

As demonstrações dos demais casos são análogas. □

Agora, se f e g são funções polinomiais com $f(a) \neq 0$ e $g(a) = 0$, afirmamos que

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

e

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$$

Para isso, basta escrever $g(x) = (x-a)^n G(x), G(a) \neq 0$ (vide Corolário 3). Desse modo, como $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{G(x)}}{(x-a)^n}$ e $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{G(x)} = \frac{f(a)}{G(a)} \neq 0$, as afirmações seguem, por meio da Proposição 5, atentando-se aos limites abaixo:

$$\lim_{x\to a} (x-a)^n = 0^+,$$

se n é par, e

$$\lim_{x\to a^-} (x-a)^n = 0^- \text{ e } \lim_{x\to a^+} (x-a)^n = 0^+,$$

se n é ímpar.

Exemplo 7. *Calcule os limites:*

(*i*) $\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right]$.

(*ii*) $\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right]$.

Solução. Com um pouco de manipulação algébrica, obtemos as seguintes expressões para as funções cujos limites desejamos calcular:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

e

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{x+2}{x^2+x+2}.$$

Portanto, para o item (i),

$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

enquanto, para (ii),

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

□

De acordo com a aula *O Problema da Tangente* do módulo de Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 1, o valor

$$m_r(a):=\lim_{x\to a}\frac{r(x)-r(a)}{x-a}$$

é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função r no ponto $(a,r(a))$, desde que o referido limite exista (e seja finito).

Da discussão acima, por cada ponto $(a,r(a))$ do gráfico de uma função racional r passa uma reta tangente. De fato, se $r=p/q$, então

$$\begin{aligned}\frac{r(x)-r(a)}{x-a}&=\frac{\frac{p(x)}{q(x)}-\frac{p(a)}{q(a)}}{x-a}\\&=\frac{p(x)q(a)-p(a)q(x)}{q(a)q(x)(x-a)}.\end{aligned}\tag{1}$$

Agora, note que a multiplicidade de a como raiz do polinômio $p(x)q(a)-p(a)q(x)$ é pelo menos 1, ao mesmo tempo em que o polinômio $q(a)q(x)(x-a)$ admite a como raiz de multiplicidade 1. Portanto, $\lim_{x\to a}\frac{r(x)-r(a)}{x-a}$ existe e é finito, como havíamos afirmado.

A próxima proposição nos fornece fórmulas para o cálculo dos coeficientes angulares $m_r(x)$ no caso em que r é uma função polinomial, ou, mais geralmente, uma função racional.

Proposição 8. *Sejam p e q funções polinomiais, com $q\not\equiv 0$.*
i) Se $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, então

$$m_p(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1.\tag{2}$$

ii) Se $r=p/q$, então

$$m_r(x)=\frac{m_p(x)q(x)-p(x)m_q(x)}{q(x)^2}.\tag{3}$$

Prova. Nas notações da prova do Teorema de D'Alembert 2, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{p(x)-p(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\sum_{j=1}^{n} a_j p_{j,a}(x)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\lim_{x\to a} a_j p_{j,a}(x)\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j p_{j,a}(a)\\ &= \sum_{j=1}^{n} j a_j a^{j-1},\end{aligned}$$

uma vez que

$$p_{j,a}(a)=\sum_{k=0}^{j-1}a^{j-1-k}a^k=\sum_{k=0}^{j-1}a^{j-1}=ja^{j-1}.$$

Isso estabelece a fórmula (2).

Em relação à fórmula (3), a igualdade (1) nos dá

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\frac{r(x)-r(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{p(x)q(a)-p(a)q(x)}{q(a)q(x)(x-a)}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{p(x)q(a)-p(a)q(a)+p(a)q(a)-p(a)q(x)}{q(a)q(x)(x-a)}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{p(x)-p(a)}{x-a}\right)q(a)-p(a)\left(\frac{q(x)-q(a)}{x-a}\right)}{q(a)q(x)}\\ &=\frac{\lim_{x\to a}\left(\frac{p(x)-p(a)}{x-a}\right)q(a)-p(a)\lim_{x\to a}\frac{q(x)-q(a)}{x-a}}{q(a)\lim_{x\to a}q(x)}\\ &=\frac{m_p(a)q(a)-p(a)m_q(a)}{q(a)^2},\end{aligned}$$

como queríamos. □

Exemplo 9. *Em relação à função racional* $r = \frac{p}{q}$*, se os polinômios* p *e* q *tiverem graus* m *e* n*, respectivamente, prove que o gráfico de* r *não admite mais que* k *retas tangentes mutuamente paralelas, em que* $k = \max\{m+n-1{,}2n\}$[4].

Prova. Primeiramente, observe que, de acordo com a fórmula (2), $m_p(x)$ é uma função polinomial de grau $m-1$ (o antecessor do grau de $p(x)$). Desse modo, fixada uma inclinação m_0, vejamos agora que a equação $m_r(x) = m_0$ admite, no máximo, k soluções, o que encerrará a demonstração. Ora, a relação (3) nos assegura que $m_r = P/Q$, sendo os graus de P e Q iguais a $m+n-1$ e $2n$, respectivamente. Portanto, a equação $m_r(x) = m_0$ tem as suas soluções entre as raízes da equação $P(x) = m_0 Q(x)$, que tem grau k, no máximo. Como uma equação polinomial de grau t admite, no máximo, t raízes reais, nada mais há a fazer. $\square$

Se uma função admite em cada ponto de um arco do seu gráfico uma reta tangente com inclinação positiva, é razoável esperar que essa função seja crescente no subdomínio correspondente. Estabeleceremos esse fato para funções cúbicas no exemplo abaixo, fazendo uso da desigualdade

$$x^2 + xy + y^2 \geq 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \tag{4}$$

a qual é válida para x e y reais quaisquer.

Se I é um intervalo, seja $\overline{I}$ o intervalo fechado de mesmos extremos que I (por exemplo, se $I = (2,+\infty)$, então $\overline{I} = [2,+\infty)$).

Exemplo 10. *Considere a função cúbica* $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$*, com* $x \in \mathbb{R}$*. Se as retas tangentes ao gráfico de* f *tiverem inclinações positivas (resp. negativas) em cada um dos pontos de abscissa pertencente ao intervalo* I *(ou seja,* $m_f(x) > 0$*, para todo* $x \in I$*), prove que* f *é crescente (resp. decrescente) em* $\overline{I}$*.*

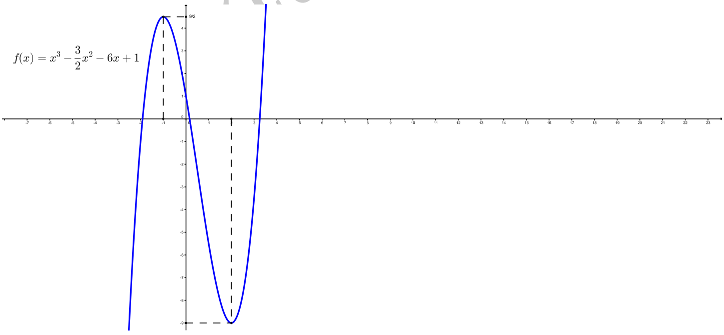
[4]Caro leitor, observe o gráfico da função do Exemplo 4 e procure quatro retas paralelas e tangentes ao gráfico da função f.

Prova. Devemos verificar que $x,y \in \overline{I}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, ou ainda, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$. Ora, levando em conta que $\frac{x+y}{2} \in I$, bem como a fórmula (2) e a desigualdade (4), temos

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= (x^2+xy+y^2)+b(x+y)+c \\
&\geq 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2b\left(\frac{x+y}{2}\right) + c \\
&= m_f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

O exemplo anterior nos auxilia a esboçar o gráfico de uma função cúbica. Por exemplo, seja $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$. Como $m_f(x) = 3(x^2 - x - 2) = 3(x+1)(x-2)$, vemos que m_f é positiva nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(2, +\infty)$, ao passo que m_f é negativa no intervalo $(-1,2)$. Segue do exemplo acima que f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[2, +\infty)$, e decrescente no intervalo $[-1,2]$.



Observação 11. *Em relação à função cúbica que acabamos de tratar,* $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$, *vale a pena observar, em conformidade com a aula* Monotonicidade, Máximos e

Mínimos *do módulo de Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 1, que* -1 *e* 2 *são pontos de máximo e mínimo* locais, *respectivamente.*

2 Mais alguns limites

Vejamos alguns exemplos das videoaulas.

Exemplo 12. *Calcule:*

i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$.

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$.

iii) $\displaystyle\lim_{t\to 9}\frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$.

Prova. Em cada um dos itens acima, a tentativa da aplicação direta da regra do quociente nos leva à indeterminação $\frac{0}{0}$; devemos, pois, contorná-la. Talvez não pareça, mas todos esses exemplos são casos particulares do limite

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a},$$

em que f é um polinômio tal que $f(a)>0$. Como

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

segue imediatamente das regras aritméticas de limites (vide 1ª e 2ª aulas do módulo anterior) que

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a}=\frac{m_f(a)}{2\sqrt{f(a)}}.$$

Analisemos, agora, os itens i), ii) e iii).

i) Temos $a = 0$, $f(h) = 1 + h$ e $m_f \equiv 1$, de onde segue que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

ii) Aqui, $a = 7$, $f(x) = x + 2$ e $m_f \equiv 1$, de forma que

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

iii) Começamos calculando $\lim_{t \to 9} \frac{\sqrt{t} - 3}{t - 9}$, que segue do caso geral apresentado tomando-se $a = 9$ e $f(t) = t$, de modo que $m_f \equiv 1$ e $\lim_{t \to 9} \frac{\sqrt{t} - 3}{t - 9} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. Portanto,

$$\lim_{t \to 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}} = \frac{1}{\lim_{t \to 9} \frac{\sqrt{t} - 3}{t - 9}} = 6.$$

□

Exemplo 13. *Se m e n são números naturais, encontre o valor do limite abaixo:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{x^2}.$$

Prova. Inspirados pelo item (c) do Exemplo 3 da última aula do módulo anterior, comecemos calculando $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2}$.

Nas notações da demonstração do Teorema de D'Alembert 2, temos

$$\begin{aligned} \cos x - 1 &= (\sqrt[m]{\cos x})^m - 1^m \\ &= (\sqrt[m]{\cos x} - 1)p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos x}), \end{aligned}$$

de forma que

$$\frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} = \frac{1}{p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos x})} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}. \tag{5}$$

Como

$$\lim_{x\to 0} p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos x}) = p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos 0}) = m$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

pelo item (a) daquele mesmo Exemplo 3, concluímos da relação (5) que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} = \frac{1}{m}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2m}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt[n]{\cos x} - 1}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{\cos x} - 1}{x^2}\\
&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}.
\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

É interessante priorizar a interpretação e a aplicação dos resultados teóricos desenvolvidos nesta aula frente à apresentação das suas demonstrações, o que pode ser feito no 2º ou 3º encontro.

Antes de iniciar as resoluções dos exemplos, procure destacar as principais ideias envolvidas nos argumentos. Em seguida, é fortemente recomendável incentivar os alunos a produzirem as suas próprias soluções, indicando, se necessário, uma estratégia argumentativa. Finalmente, sugerimos que as resoluções sejam apresentadas em detalhes e problemas correlatos sejam discutidos com a turma.

Dessa forma, três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.