Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Geométrica

Multiplicação e Divisão de números complexos no plano de Argand-Gauss - Parte 2

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de setembro de 2020

1 Interpretação geométrica da multiplicação em forma polar (continuação)

Vamos, agora, demonstrar o resultado abaixo, que já havia sido enunciado na parte 1 dessa aula.

Exemplo 1. *Se $z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ são dois complexos escritos em forma polar, então*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

Ou seja, o módulo de $z_1 z_2$ é obtido multiplicando *os módulos de z_1 e z_2, mas o argumento de $z_1 z_2$ é obtido* somando *os argumentos de z_1 e z_2.*

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1),\\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2). \end{aligned}$$

Para calcular produto $z_1 z_2$, reordenamos os fatores (usando a propriedade comutativa da multiplicação) e depois usamos a propriedade distributiva para expandir os termos entre parênteses:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\left(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1\right) \cdot r_2\left(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2\right)\\ &= r_1 r_2\left(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2\right)\\ &= r_1 r_2\left(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \right.\\ &\qquad\qquad \left. + i(\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2)\right). \end{aligned}$$

Para terminar, basta simplificar a expressão acima utilizando as fórmulas do seno e cosseno da soma de dois arcos (veja o módulo "Trigonometria II"). Mais precisamente, como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) &= \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 \quad \text{e}\\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 \,\text{cis}(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

□

Um caso interessante é quando um dos fatores for um complexo de módulo 1. Digamos, por exemplo, que $|z_2| = 1$, de sorte que $z_2 = \text{cis}(\theta_2)$, ou seja, $r_2 = 1$ na notação anterior. Neste caso, $z_1 z_2 = r_1 \,\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ é um complexo que possui o mesmo módulo que z_1 e cujo argumento é obtido somando-se θ_2 ao argumento de z_1.

Geometricamente, este complexo é marcado no plano de Argand-Gauss rotacionando-se z_1 por um ângulo de θ_2 (radianos) em torno da origem (no sentido anti-horário).

Exemplo 2. *Interprete geometricamente os produtos $z_1 \cdot z_2$ e $z_2 \cdot z_3$, assumindo que:*

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos 0 + i\,\text{sen}\, 0), \\ z_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ z_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

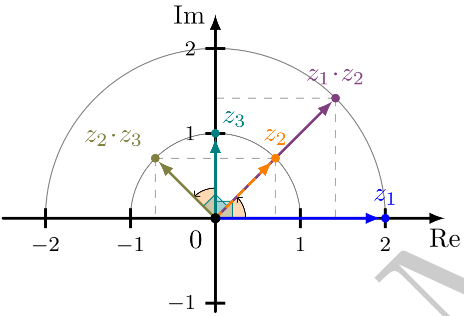
Solução. Aplicando o resultado do Exemplo 1, temos que:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\left(\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2z_2. \end{aligned}$$

Por sua vez, para o produto $z_2 \cdot z_3$ temos que:

$$\begin{aligned} z_2 z_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Vamos, agora, marcar os números z_1, z_2, z_3 no plano de Argand-Gauss, assim como os produtos z_1z_2 e z_2z_3.



Veja que, como z_2 possui módulo 1 e argumento $\frac{\pi}{4}$, o resultado do produto z_1z_2 é obtido rotacionando-se o vetor z_1 em $\frac{\pi}{4}$ radianos no sentido anti-horário. Como z_1 está (originalmente) sobre o eixo real, o resultado de z_1z_2 corresponde a um vetor na mesma direção de z_2.

Da mesma forma, o resultado do produto z_2z_3 também é obtido rotacionando-se o vetor z_3 em $\frac{\pi}{4}$ radianos no sentido anti-horário. Assim, o ângulo formado entre os vetores z_3 e z_2z_3 é igual a $\frac{\pi}{4}$ (ou seja, 45 graus). Ainda em relação ao produto z_2z_3, como z_3 possui módulo 1 e argumento $\frac{\pi}{2}$, também podemos ver o resultado como uma rotação de z_2 por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$. Por isso, o ângulo formado entre os vetores z_2 e z_2z_3 é de $\frac{\pi}{2}$ (ou seja, 90 graus). $\square$

Como já demonstrado na parte 1 dessa aula, podemos estender a fórmula do produto de dois complexos para n complexos, para qualquer n inteiro positivo. Mais precisamente, sendo

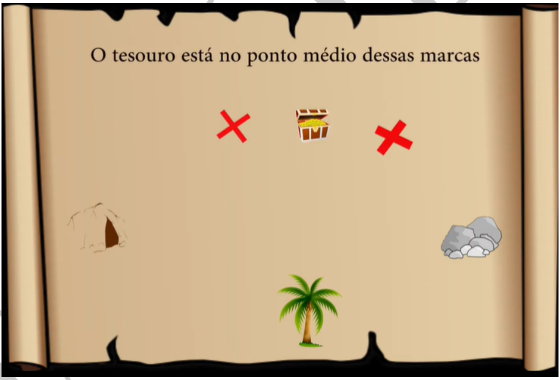
$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \\ z_2 &= r_2 \operatorname{cis} \theta_2 \\ &\vdots \\ z_n &= r_n \operatorname{cis} \theta_n \end{aligned}$$

e aplicando o resultado do Exemplo 1 várias vezes, obtemos a seguinte expressão para o produto de n números complexos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \ldots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n).$$

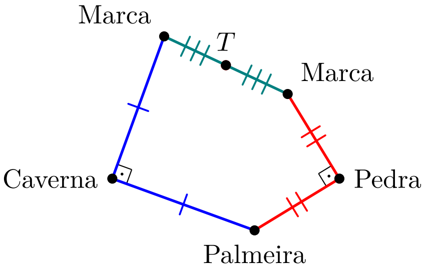
O próximo problema é um desafio.

Exemplo 3. *Encontramos um mapa de um tesouro que estava perdido em uma ilha. O mapa continha as seguintes instruções. Ande da palmeira até a entrada da caverna. Lá chegando, vire 90 graus à direita e caminhe o mesmo número de passos. No fim desse trajeto, coloque uma marca e retorne até a palmeira. Agora, caminhe em direção à pedra. Lá chegando, vire 90 graus à esquerda e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira à pedra. Coloque uma marca no fim deste trajeto. o tesouro está no ponto médio dessas marcas.*



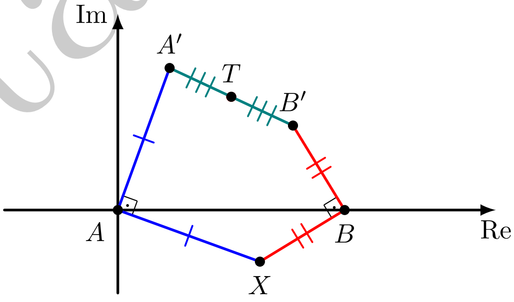
Contudo, há um problema. Ao chegar à ilha, a palmeira havia sido destruída. É possível localizar o tesouro sem conhecer a posição da palmeira?

Solução. A resposta é sim. Primeiramente, vamos organizar as informações do problema em uma figura. Colocamos as posições da Palmeira, Caverna e Pedra de forma arbitrária.



A partir dessas três posições, conseguimos achar as duas marcas seguindo as instruções do mapa. Em particular, os segmentos azuis possuem o mesmo comprimento e são perpendiculares, assim como os segmentos vermelhos. E o tesouro encontra-se no ponto médio das marcas.

O problema é que a posição da palmeira não é conhecida. Queremos mostrar que isso não influencia na posição do tesouro. Para isso, vamos considerar que os pontos indicados estão sobre o plano de Argand-Gauss. Sem perda da generalidade, vamos supor que a Caverna está na origem, $A = (0{,}0)$, e que a Pedra está sobre o eixo real (isso pode ser feito transladando e rotacionando o mapa). Vamos chamar de B a localização da pedra e vamos denotar por X a posição da Palmeira, que é um ponto qualquer (desconhecido). A partir de X, obtemos os pontos A' e B' que correspondem à primeira e à segunda marcas, respectivamente, bem como seu ponto médio T.



Cada um desses pontos corresponde a um número complexo. Veja que A' é obtido rotacionando-se X por um ângulo de 90 graus em torno da origem (A), no sentido anti-horário. Isso corresponde a multiplicar X por i (já que i possui módulo 1 e argumento $\frac{\pi}{2}$), logo, $A' = iX$. O ponto B' também é obtido a partir de X por uma rotação de 90 graus; porém, essa rotação tem centro em B e é feita no sentido horário. Isso quer dizer que o vetor de $\overrightarrow{BB'}$ é obtido rotacionado-se $\overrightarrow{BX}$ em 90 graus no sentido horário, o que equivale a multiplicá-lo por $-i$. Logo,

$$B' - B = (X - B)(-i) \implies B' - B = -iX + iB \qquad (1)$$
$$\implies B' = -iX + iB + B. \qquad (2)$$

Por fim, T é o ponto médio de A' e B', logo,

$$T = \frac{A' + B'}{2} = \frac{iX + (-iX + iB + B)}{2} = \frac{iB + B}{2}.$$

Isso mostra que o valor de T não depende do valor de X. Além disso, conhecendo A e B podemos encontrar T facilmente, da seguinte maneira: rotacione B em torno de A por 90 graus no sentido anti-horário e marque o ponto obtido (este ponto corresponde ao complexo iB); em seguida, marque o ponto médio entre B e o ponto marcado, obtendo $\frac{iB+B}{2}$, que é exatamente a posição do tesouro. □

2 Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Vimos que, ao multiplicar dois complexos em forma trigonométrica, devemos multiplicar seus módulos e somar seus argumentos. Já para dividi-los, iremos *dividir* seus módulos e *subtrair* o argumento do divisor do argumento do dividendo. A seguir, provamos esta afirmação.

Exemplo 4. *Sejam $z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ números complexos dados, com $z_2 \neq 0$. Temos que*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Solução. Seja $z = \frac{z_1}{z_2}$. Queremos obter a forma trigonométrica de z, ou seja, calcular r e θ tais que $z = r\operatorname{cis}\theta$. Veja que $z\,z_2 = z_1$, logo,

$$r\operatorname{cis}\theta \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1\operatorname{cis}\theta_2.$$

Já sabemos calcular o produto dos fatores do lado esquerdo desta equação, o que nos fornece a igualdade:

$$rr_2\operatorname{cis}(\theta + \theta_2) = r_1\operatorname{cis}(\theta_1).$$

Assim,

$$rr_2 = r_1 \implies r = \frac{r_1}{r_2}$$

e

$$\theta + \theta_2 = \theta_1 \implies \theta = \theta_1 - \theta_2.$$

Como queríamos, concluímos a partir do raciocínio acima que

$$z = r\operatorname{cis}\theta = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

$\square$

Exemplo 5. *Considerando os complexos*

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \\ z_2 &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right), \\ z_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Calcule:

(a) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(b) $\dfrac{z_2 z_3}{z_1}$.

Solução. (a) Escrevendo $\frac{z_1}{z_2} = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, temos que $r = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e

$$\begin{aligned}\theta = \arg(z_1) - \arg(z_2) &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\\ &= \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right).$$

(b) Podemos combinar as regras da multiplicação e da divisão: para calcular o módulo de $\dfrac{z_2 z_3}{z_1}$, fazemos $\dfrac{|z_2|\cdot|z_3|}{|z_1|} = \frac{4\cdot 1}{2} = 2$; para calcular seu argumento, fazemos

$$\begin{aligned}\big(\arg(z_2) + \arg(z_3)\big) - \arg(z_1) &= \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2\pi}{3}\\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\\ &= \frac{4\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{z_2 z_3}{z_1} = 2(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = 2.$$

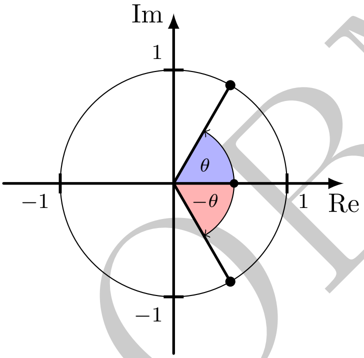
□

Lembre-se de que o **inverso** (multiplicativo) de um número complexo z é o número $\frac{1}{z}$, também denotado por z^{-1}. Seja $r\,\text{cis}\,\theta$ a forma polar de z. Como $1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$, temos que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)}{r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} = \frac{1}{r}\,\text{cis}(0-\theta) = \frac{1}{r}\,\text{cis}(-\theta).$$

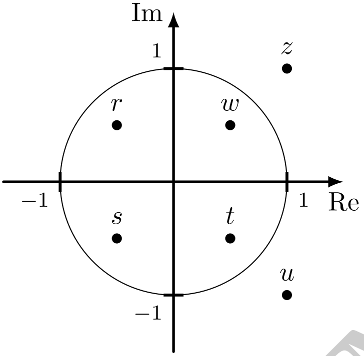
Assim, o argumento de z^{-1} é $-\theta$ e seu módulo é r^{-1}.

No caso em que $|z| = 1$, temos que $z = \operatorname{cis}\theta$, ao passo que $z^{-1} = \operatorname{cis}(-\theta)$. Ambos estão sobre o círculo de raio 1 com centro na origem, mas seus argumentos, apesar de possuírem o mesmo valor absoluto, têm sinais opostos. Isso significa que um deles é medido no sentido anti-horário e o outro no sentido horário. (Lembre-se de que o sentido positivo é, por convenção, o sentido anti-horário). Na figura abaixo, assumimos que $\theta > 0$. Veja que, ainda no caso em que $|z| = 1$, para obter z^{-1} basta ver o eixo real como um espelho.



Por outro lado, quando $|z| > 1$, temos que $|z^{-1}| < 1$, de forma que z^{-1} está mais perto da origem do que z. Analogamente, quando $|z| < 1$, temos que $|z^{-1}| > 1$, de forma que z^{-1} está mais distante da origem do que z.

Exemplo 6. *A figura a seguir mostra, no plano complexo, o círculo de centro na origem e raio* 1*, bem como as imagens de seis números complexos. Qual dos complexos indicados melhor representa o complexo* $\frac{1}{z}$*?*



Solução. Sendo $z = r \operatorname{cis}\theta$, temos que $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$.

Veja que, pela figura, $r > 1$, pois z está fora do círculo de raio 1. Logo, $\frac{1}{r} < 1$, o que indica que $\frac{1}{z}$ está no interior do círculo, descartando a possibilidade da resposta ser u.

Observe agora que o ângulo θ é do primeiro quadrante, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Lembre-se de que $-\theta$ é o simétrico de θ em relação ao eixo real (pense no eixo real como um espelho). Logo, o complexo $\frac{1}{z}$ deverá estar no quarto quadrante. Como já descartamos a resposta u, a única possibilidade é que $\frac{1}{z}$ seja igual a t. $\square$

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.