Material Teórico - Módulo de FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO

Operações com Frações - Fraçoes como Razões

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Frações como razões

Uma outra forma bastante comum de nos referirmos às frações é através das *razões* ou *proporções*. Por exemplo, quando dizemos que a razão do número de vitórias pelo número de derrotas de um time é de 2 : 3 (leia 2 para 3), estamos dizendo que, se montarmos uma fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e cujo denominador é igual ao número de derrotas, então esta fração será equivalente à fração $\frac{2}{3}$. Assim é que, supondo que o número de vitórias seja igual a 18 e o de derrotas igual a 27, teremos

$$\frac{18}{27} = \frac{2 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \frac{2}{3}.$$

Também podemos considerar razões como proporções e elaborar *relações múltiplas*. Por exemplo, imagine que foi feita uma pesquisa para determinar o esporte favorito dos alunos de uma escola. As opções eram *futebol*, *vôlei* e *basquete*. Foi verificado que a predileção seguia uma proporção de (4 : 2 : 3). Isto é:

- Para cada 4 alunos que gostam de futebol, existem 2 que gostam de vôlei.
- Para cada 4 alunos que gostam de futebol, existem 3 que gostam de basquete.
- Para cada 3 alunos que gostam de basquete, existem 2 que gostam de vôlei.

Veja que as proporções de alunos interessados em cada esporte podem ser interpretadas como um conjunto de várias razões. Além disso, razões e proporções são medidas *relativas* e não *absolutas*. De outra forma, uma mesma proporção pode representar situações distintas. No caso da proporção (4 : 2 : 3) que vimos acima, tanto uma escola com 100 alunos, dos quais 40 gostam de futebol, 20 de vôlei e 30 de basquete, quanto uma outra com 1000 alunos, dos quais 400 gostam de futebol, 200 de vôlei e 300 de basquete, possuem as mesmas relações de proporcionalidade.

Exercício 1. *O dono de uma revenda de veículos tem um total de* 77 *automóveis. A razão entre veículos novos e usados é de* (4 : 3)*. Quantos são os carros novos?*

Solução. Primeiramente, faremos uma tabela com algumas das possibilidades cujas razões entre veículos novos e usados são sempre (4 : 3):

Novos	Usados	Total
4	3	7
8	6	14
12	9	21
16	12	28

Escrevendo mais algumas linhas da tabela, concluímos que, quando o total de carros é 77, devemos ter 44 carros novos.

De uma forma mais direta, observando que há 4 carros novos em cada $4 + 3 = 7$ carros (i.e., notando que a proporção de carros novos, em relação ao total de veículos, é (4 : 7), concluímos que o total de carros novos é

$$\frac{4}{7} \cdot 77 = 44.$$

□

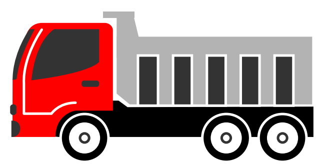
Exercício 2. *Em uma conferência, a razão entre brasileiros e estrangeiros era de* (7 : 9)*. Se haviam* 80 *pessoas nessa reunião, quantos eram os brasileiros?*

Solução. Como $7 + 9 = 16$, concluímos que, de cada 16 pessoas, 7 são brasileiros. Portanto, a proporção de brasileiros em relação ao total de pessoas é (7 : 16), de forma que a resposta do exercício é

$$\frac{7}{\cancel{16}} \cdot \cancel{80} = 7 \cdot 5 = 35.$$

□

Exercício 3. *Um caminhão pode levar* 300 *sacos de cimento ou* 7290 *tijolos. Se o veículo já foi carregado com* 100 *sacos de cimento, quantos tijolos ainda poderemos colocar?*



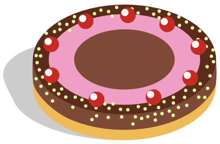
Solução. Observe que 300 sacos de cimento correspondem à capacidade total do caminhão. Assim, quando este é carregado com 100 sacos, $\frac{1}{3}$ de sua capacidade terá sido utilizada, restando ainda $\frac{2}{3}$ dela.

Agora, veja que 7290 tijolos também correspondem à capacidade total do caminhão. Portanto, $\frac{2}{3}$ dela equivalem a

$$\frac{2}{3} \cdot 7290 = 4860$$

tijolos. Assim, ainda podemos colocar 4860 tilojos no caminhão. □

Exercício 4. *Para fazer um bolo é necessário misturar diversos ingredientes, dentre os quais estão farinha, açúcar e achocolatado em pó. Estes devem ser misturados mantendo uma proporção de* (6 : 4 : 3)*. Maria tem* 500 *gramas de farinha,* 400 *gramas de açúcar e* 150 *gramas de achocolatado em pó, e deseja fazer um bolo utilizando, em gramas, a maior quantidade possível de ingredientes. Que quantidade é essa?*



Solução. Observe que as porções dos ingredientes não estão na proporção prescritas pela receita. Realmente,

$$(500 : 400 : 150) = (50 : 40 : 15) = (10 : 8 : 3).$$

Isso significa que, se quisermos manter a proporção correta, não devemos utilizar alguns dos ingredientes em sua totalidade. Agora façamos os seguintes testes:

1. Caso Maria utilize toda a farinha (500 gramas), ela deverá utilizar $\frac{4}{6} \cdot 500 = 666.66$ gramas de açúcar para manter a proporção. Mas isso não é possível, uma vez que ela só dispõe de 400 gramas de açúcar.

2. Caso Maria utilize todo o açúcar (400 gramas), ela deverá utilizar $\frac{6}{4} \cdot 400 = 600$ gramas de farinha. Mas isso também não é possível, pois Maria só possui 500 gramas de farinha.

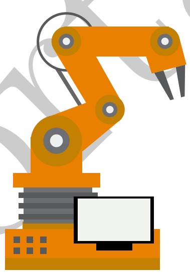
3. Caso Maria utilize todo o achocolatado em pó (150 gramas), ela deverá utilizar $\frac{6}{3} \cdot 150 = 300$ gramas de farinha e $\frac{4}{3} \cdot 150 = 200$ gramas de açúcar para manter a proporção.

A análise dos casos acima deixa claro que a maior quantidade de ingredientes que Maria pode utilizar é, em gramas,

$$150 + 300 + 200 = 650.$$

□

Exercício 5. *Uma máquina A é capaz de fabricar* 1200 *peças de computador em três horas. Uma máquina B faz o mesmo trabalho em quatro horas. Se as duas trabalharem juntas, em quanto tempo as peças estarão prontas?*



Solução. Em uma hora, a primeira máquina fabrica $\frac{1}{3}$ das peças, enquanto a segunda fabrica $\frac{1}{4}$ das peças. Portanto, trabalhando juntas, as duas máquinas executam, em uma hora, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ do trabalho todo.

Resta, então, $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ do serviço para a próxima hora, que não será totalmente utilizada. Porém, dizer que 1 hora de trabalho corresponde a $\frac{7}{12}$ do serviço é o mesmo que afirmar que a proporção entre horas de trabalho empregadas e trabalho realizado é $(1 : \frac{7}{12}) = (12 : 7)$. Portanto, para executar $\frac{5}{12}$ do trabalho, será gasto

$$\frac{5}{12} \times \frac{12}{7} = \frac{5}{7}$$

de uma hora, o que corresponde a aproximadamente a 43 minutos.

Assim, trabalhando juntas, as duas máquinas completarão o serviço em 1 h 43 min. □

Exercício 6. *Trabalhando juntos, Alvo e Eva pintam uma casa em três dias, Eva e Ivo pintam a mesma casa em quatro dias e Alvo e Ivo pintam-na em seis dias. Se os três trabalharem juntos, em quanto tempo eles pintarão a casa? (Considere uma jornada de trabalho de* 6 *horas por dia.)*

Solução. Muitos alunos tentam resolver este problema utilizando o seguinte raciocínio: escrevendo A para Alvo, E para Eva e I para Ivo, obtemos

$$\begin{cases} A + E = 3 \\ E + I = 4 \\ A + I = 6 \end{cases} . \tag{1}$$

Somando estas equações, temos

$$2(A + E + I) = 13 \Rightarrow A + E + I = 6,5.$$

Porém, esta resposta não faz sentindo, pois é impossível que três pessoas, trabalhando juntas e da mesma forma que antes, levem mais tempo para finalizar um serviço do que apenas duas delas levariam.

O ponto é que o sistema (1) não traduz corretamente o *rendimento do trabalho* de Alvo, Eva e Ivo. Para tanto, devemos considerar A, E e I como as *frações do serviço total* que cada pessoa consegue fazer em um dia. Dessa forma, os dados do problema fornecem:

$$\begin{cases} A + E = \frac{1}{3} \\ E + I = \frac{1}{4} \\ A + I = \frac{1}{6} \end{cases} .$$

Somando estas equações, obtemos

$$2(A + E + I) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4},$$

de maneira que

$$A + E + I = \frac{3}{8}.$$

Portanto, em um dia, os três juntos realizam $\frac{3}{8}$ do trabalho, de forma que, em dois dias, será realizado $\frac{6}{8}$ do trabalho. Restarão, então, $\frac{2}{8}$ do serviço para o terceiro dia.

Mas, como os três juntos levam 6 horas para completar $\frac{3}{8}$ do serviço, concluímos que, para realizar os $\frac{2}{8}$ restantes, eles necessitarão de $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ horas.

Logo, trabalhando juntos, os três gastarão dois dias e quatro horas. $\square$

Exercício 7. *Em uma escola, a razão entre meninos e meninas que estão no sexto ano é de* $(4 : 5)$*, ao passo que a razão correspondente para alunos que estão no sétimo ano é de* $(5 : 4)$*. Caso a diretora resolva juntar estas duas turmas, qual será a nova razão entre os números de meninos e meninas?*

Poderíamos pensar da seguinte forma: Na primeira sala, para cada quatro meninos, existem cinco meninas. Enquanto que na segunda sala, para cada quatro meninas, existem cinco meninos. Logo, ao juntarmos as duas salas, a razão ficaria de $(1 : 1)$, de forma que, para cada menino, existe exatamente uma menina.

Porém, essa solução só será correta se as quantidades de alunos em cada uma das salas for a mesma. Essa informação, contudo, não é mencionada no enunciado do exercício, tornando-o incompleto. A seguir, propomos o exercício com enunciado correto.

Exercício 8. *Em uma escola, a razão entre meninos e meninas que estão no sexto ano é de* $(4 : 5)$*, ao passo que a razão correspondente para alunos que estão no sétimo ano é de* $(5 : 4)$*. Sabendo que as duas turmas possuem quantidades iguais de alunos, pergunta-se: caso a diretora resolva juntar as duas turmas, qual será a nova razão entre os números de meninos e meninas?*

Solução. Veja a discussão apresentada no penúltimo parágrafo. $\square$

Exercício 9. *Um copo de suco foi feito misturando água e polpa de frutas, na razão volumétrica de* $(3 : 1)$*. Um segundo copo de suco foi feito usando uma razão volumétrica de* $(4 : 3)$*, entre água e polpa de frutas. Sabendo que o segundo suco tem metade do volume do primeiro, qual será a razão volumétrica entre água e polpa de frutas se misturarmos os dois copos?*

Solução. No primeiro copo, os volumes relativos de água e polpa em relação ao volume absoluto do copo são, respectivamente, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.

No segundo copo, os volumes relativos de água e polpa em relação ao volume absoluto do copo são, respectivamente, $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{7}$, mas cada uma dessas frações representa, em volumes absolutos, metade daqueles do primeiro copo (uma vez que a capacidade do segundo copo é igual à metade da capacidade do primeiro).

Portanto, ao misturarmos os dois copos, estamos misturando um volume relativo de

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{29}{28}$$

de água com um volume relativo de

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{13}{28}$$

de polpa.

Assim, a relação entre os volumes de água e polpa quando misturarmos os dois copos será

$$\frac{29/28}{13/28} = \frac{29}{28} \cdot \frac{28}{13} = \frac{29}{13}.$$

$\square$

Exercício 10 (OBM 2010)**.** *Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido* $\frac{3}{4}$ *da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?*

Solução. Como as duas garotas encontram-se na terceira de quatro partes iguais da escada, podemos deduzir que Ana é três vezes mais rápida do que Beatriz. Portanto, quando Ana terminar de descer, ela terá percorrido a última parte da escada enquanto Beatriz terá percorrido um terço de um quarto da escada. Logo, Beatriz terá subido, ao todo

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{12}} = \frac{1}{3}.$$

Faltará para Beatriz, então, subir ainda $\frac{2}{3}$ da escada. $\square$

Sugestões ao professor

Nesta última aula do módulo, é recomendável que o professor comece relembrando os fatos mais importantes vistos até aqui. Tenha um cuidado especial com os exercícios que envolvam misturas de razões. Destaque o fato de que as razões e proporções são medidas relativas, e não absolutas.