Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Seno, Cosseno e Tangente
Parte 3

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de agosto de 2024

Neste material, continuaremos a deduzir fórmulas que permitem calcular o valor de funções trigonométricas de alguns arcos em função dos valores dessas mesmas funções em arcos cujos valores já são conhecidos.

Mais precisamente, deduziremos fórmulas que permitem calcular o valor das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente em $2a$ e $3a$, desde que sejam conhecidos os valores dessas funções em a.

Iniciamos relembrando as fórmulas deduzidas no material anterior, as quais serão úteis para deduzir as novas fórmulas e para resolver os exemplos que apresentaremos em seguida.

- Cosseno da soma:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{1}$$

- Cosseno da diferença:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{2}$$

- Seno da soma:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a. \tag{3}$$

- Seno da diferença:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \tag{4}$$

- Tangente da soma:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{5}$$

- Tangente da diferença:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{6}$$

Funções trigonométricas de $2a$

Utilizando a fórmula (1) para o cosseno da soma de dois arcos com $b = a$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \cos(a+a) &= \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a \\ &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a. \tag{7}$$

Substituindo $\operatorname{sen}^2 a$ por $1 - \cos^2 a$, obtemos $\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$, o que dá a seguinte fórmula alternativa para o cosseno do arco duplo:

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1. \tag{8}$$

Da mesma forma, substituindo $\cos^2 a$ por $1 - \operatorname{sen}^2 a$ em (7) ou (8), obtemos

$$\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a. \tag{9}$$

Vale observar que, dependendo do problema que se tenha à mão, pode ser mais conveniente aplicar (7), (8) ou (9) para calcular $\cos(2a)$. Assim, essas três fórmulas são igualmente importantes.

Agora, utilizando a fórmula (3) para o seno da soma de dois arcos com $b = a$, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+a) &= \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} a \cos a \\ &= 2 \operatorname{sen} a \cos a, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a \cos a. \tag{10}$$

Finalmente, utilizando a fórmula (5), para a tangente da soma de dois arcos (novamente com $b = a$), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+a) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a} \\ &= \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \tag{11}$$

Funções trigonométricas de $3a$

Utilizando mais uma vez a fórmula (1), desta vez com a no lugar de b e $2a$ no lugar de a, temos que

$$\cos(2a+a) = \cos(2a)\cos a - \operatorname{sen}(2a)\operatorname{sen} a.$$

Agora, utilizando as fórmulas (8) e (10), obtemos

$$\begin{aligned}\cos(3a) &= \cos(2a)\cos a - \operatorname{sen}(2a)\operatorname{sen} a\\ &= \big(2\cos^2 a - 1\big)\cos a - 2\operatorname{sen} a\cos a\operatorname{sen} a\\ &= \big(2\cos^2 a - 1\big)\cos a - 2\operatorname{sen}^2 a\cos a.\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo $\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$ na última expressão acima, concluímos que

$$\begin{aligned}\cos(3a) &= \big(2\cos^2 a - 1\big)\cos a - 2\operatorname{sen}^2 a\cos a\\ &= \big(2\cos^2 a - 1\big)\cos a - 2\big(1-\cos^2 a\big)\cos a\\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a. \tag{12}$$

Por sua vez, combinando as fómulas (3) (novamente com a no lugar de b e $2a$ no lugar de a), (10) e (9), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2a+a) &= \operatorname{sen}(2a)\cos a + \operatorname{sen} a\cos(2a)\\ &= 2\operatorname{sen} a\cos a\cos a + \operatorname{sen} a\big(1 - 2\operatorname{sen}^2 a\big)\\ &= 2\operatorname{sen} a\cos^2 a + \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a.\end{aligned}$$

Substituindo $\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$ na última expressão acima, ficamos com

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3a) &= 2\operatorname{sen} a\cos^2 a + \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a\\ &= 2\operatorname{sen} a\big(1-\operatorname{sen}^2 a\big) + \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a\\ &= 2\operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a + \operatorname{sen} a - 2\operatorname{sen}^3 a\\ &= 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(3a) = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a. \tag{13}$$

Para encontrarmos uma fórmula para a tangente do arco triplo $3a$, procedemos de maneira análoga ao que foi feito acima para o cosseno e o seno. De fato, basta combinar as fórmulas (5) e (11) para obter

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(2a+a) &= \frac{\operatorname{tg}(2a) + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}(2a)\operatorname{tg} a} \\
&= \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}\cdot \operatorname{tg} a} \\
&= \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} a + \left(1-\operatorname{tg}^2 a\right)\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 a - 2\operatorname{tg}^2 a}{1-\operatorname{tg}^2 a}} \\
&= \frac{2\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a} \\
&= \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\operatorname{tg}(3a) = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}. \tag{14}$$

Exemplos

Os exemplos a seguir ilustram contextos de utilização das fórmulas deduzidas anteriormente.

Exemplo 1 (PUC-SP). *Se* $\operatorname{tg}(x+y) = 33$ *e* $\operatorname{tg} x = 3$*, então* $\operatorname{tg} y$ *é igual a:*

(a) 0,2.

(b) 0,3.

(c) 0,4.

(d) 0,5.

(e) 0,6.

Solução. Pela fórmula (5), temos que

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Substituindo os valores $\operatorname{tg}(x+y) = 33$ e $\operatorname{tg} x = 3$, segue que

$$\begin{aligned} 33 = \frac{3 + \operatorname{tg} y}{1 - 3\operatorname{tg} y} &\Longrightarrow 33 - 99\operatorname{tg} y = 3 + \operatorname{tg} y \\ &\Longrightarrow 100\operatorname{tg} y = 30 \\ &\Longrightarrow \operatorname{tg} y = 0{,}3. \end{aligned}$$

Logo, a alternativa correta é a da letra (b). □

Exemplo 2 (ITA). *A expressão trigonométrica*

$$\frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2} - \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2},$$

para $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *com* $x \neq \frac{\pi}{4}$, *é igual a*

(a) $\operatorname{sen}(2x)$.

(b) $\cos(2x)$.

(c) 1.

(d) 0.

(e) $\sec(2x)$.

Solução. Pela fórmula (7), temos que

$$\frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{1}{(\cos(2x))^2} = \frac{1}{\cos^2(2x)}.$$

Além disso, utilizando a fórmula (11), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)^2} &= \frac{\left(2\operatorname{tg} x\right)^2}{\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)^2}\\ &= \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right)^2\\ &= \left(\operatorname{tg}(2x)\right)^2\\ &= \operatorname{tg}^2(2x).\end{aligned}$$

Desse modo, chegamos a

$$\frac{1}{\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)^2}-\frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2(2x)}-\operatorname{tg}^2(2x)=\frac{1}{\cos^2(2x)}-\frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{\cos^2(2x)}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{sen}^2(2x)}{\cos^2(2x)}=\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(2x)}=1.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (c). □

Exemplo 3 (ITA). *Sejam A, B e C os vértices de um triângulo. Determine* $\operatorname{sen}\widehat{B}$*, sabendo que*

$$\operatorname{sen}(\widehat{A}+\widehat{B})=\frac{4}{5}=\operatorname{sen}(\widehat{A}-\widehat{C}).$$

Solução. Veja que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$, logo, $\widehat{A}+\widehat{B}=180°-\widehat{C}$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\widehat{C} &= \operatorname{sen}(180°-\widehat{C})\\ &= \operatorname{sen}(\widehat{A}+\widehat{B})\\ &= \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\operatorname{sen}(\widehat{A}-\widehat{C})>0$ e $|\widehat{A}-\widehat{C}|<180°$, temos $0°<\widehat{A}-\widehat{C}<180°$. Também, $0<180°-\widehat{C}<180°$ e

$$\operatorname{sen}(180°-\widehat{C})=\operatorname{sen}(\widehat{A}-\widehat{C}).$$

Portanto, há duas possibilidades.

- Se $180^\circ - \widehat{C} = \widehat{A} - \widehat{C}$, então $\widehat{A} = 180^\circ$, o que é um absurdo.
- Se $180^\circ - \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} - \widehat{C})$, então $\widehat{A} = 2\widehat{C}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ &\Longrightarrow \widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C})\\ &\Longrightarrow \widehat{B} = 180^\circ - (2\widehat{C} + \widehat{C})\\ &\Longrightarrow \widehat{B} = 180^\circ - (3\widehat{C})\\ &\Longrightarrow \operatorname{sen}\widehat{B} = \operatorname{sen}(3\widehat{C}).\end{aligned}$$

Agora, utilizando a fórmula (13), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\widehat{B} &= \operatorname{sen}(3\widehat{C})\\ &= 3\operatorname{sen}\widehat{C} - 4\operatorname{sen}^3\widehat{C}\\ &= 3\cdot\frac{4}{5} - 4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\\ &= \frac{12}{5} - 4\cdot\frac{64}{125}\\ &= \frac{300}{125} - \frac{256}{125}\\ &= \frac{44}{125}.\end{aligned}$$

$\square$

Solução alternativa. De $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, obtemos $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\widehat{C} &= \operatorname{sen}(180^\circ - \widehat{C})\\ &= \operatorname{sen}(\widehat{A} + \widehat{B})\\ &= \operatorname{sen}(\widehat{A} - \widehat{C})\\ &= \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos (como na solução anterior) que $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ e $\operatorname{sen}\widehat{C} = \dfrac{4}{5}$.

Uma vez que $\widehat{A} = 2\widehat{C}$, temos que $\widehat{C}$ deve ser um ângulo agudo, o que implica $\cos \widehat{C} > 0$. Além disso,

$$\cos^2 \widehat{C} = 1 - \operatorname{sen}^2 \widehat{C} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25},$$

logo, $\cos \widehat{C} = \dfrac{3}{5}$. Utilizando as fórmulas (10) e (7), obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \widehat{A} &= \operatorname{sen}(2\widehat{C}) \\
&= 2 \operatorname{sen} \widehat{C} \cos \widehat{C} \\
&= 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \\
&= \frac{24}{25}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos \widehat{A} &= \cos(2\widehat{C}) \\
&= \cos^2 \widehat{C} - \operatorname{sen}^2 \widehat{C} \\
&= \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\
&= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} \\
&= -\frac{7}{25}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando agora a fórmula (3), chegamos a

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\widehat{B} &= \operatorname{sen}(180^\circ - (\widehat{A}+\widehat{C}))\\
&= \operatorname{sen}(\widehat{A}+\widehat{C})\\
&= \operatorname{sen}\widehat{A}\cos\widehat{C} + \operatorname{sen}\widehat{C}\cos\widehat{A}\\
&= \frac{24}{25}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)\\
&= \frac{24}{25}\cdot\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{25}\\
&= \frac{72}{125}-\frac{28}{125}\\
&= \frac{44}{125}.
\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. É fundamental que os alunos se habituem a utilizar as fórmulas para calcular as funções trigonométricas da soma, da diferença e dos arcos duplo e triplo. Como vimos nos exemplos apresentados, essas fórmulas são imprescindíveis em suas soluções. Se o professor julgar necessário, outros exemplos podem ser apresentados, até que os alunos se sintam confortáveis com a utilização dessas fórmulas.

Sugestões de Leitura Complementar

1 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.

2. M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner. *Trigonometria e Números Complexos*. SBM, 2005.