

# Material Teórico - Módulo Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

## Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis

Nono Ano

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**  
**Autor: Prof. Antonio Caminha**

02 de Fevereiro de 2026



PORTAL DA  
MATEMÁTICA  
OBMEP

# 1 Segmentos comensuráveis e incommensuráveis

Considere dois segmentos de reta,  $AB$  e  $CD$ , com  $\overline{CD} = u$ . Se existirem  $n-1$  pontos  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , sobre o segmento  $AB$ , tais que

$$\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{n-2}A_{n-1}} = \overline{A_{n-1}B} = u,$$

diremos que a razão entre os comprimentos dos segmentos  $AB$  e  $CB$  é o número inteiro positivo  $n$ , e escrevemos

$$\overline{AB} = n \cdot u.$$

A figura a seguir ilustra os casos  $n = 2, 3$  e  $4$ , assim como o caso genérico.

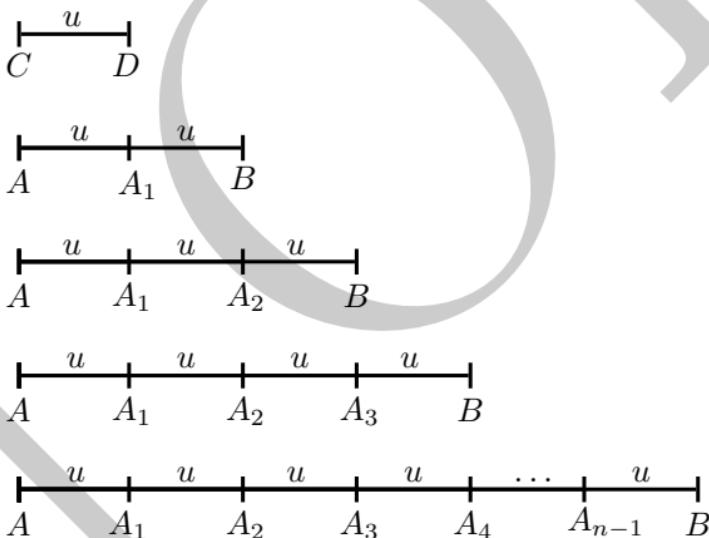


Figura 1: segmentos de razão inteira.

Se a razão entre os segmentos  $AB$  e  $CD$  não for inteira, pode existir um terceiro segmento  $EF$  tal que  $AB$  e  $CD$  sejam ambos múltiplos inteiros de  $EF$ . Mais precisamente, se esse for o caso, existirão números inteiros positivos  $m$  e  $n$

tais que

$$\overline{EF} = v, \quad \overline{AB} = m \cdot v \quad \text{e} \quad \overline{CD} = n \cdot v.$$

Então, diremos que a razão entre os segmentos  $AB$  e  $CD$  é igual a  $\frac{m}{n}$ , e escreveremos

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot u.$$

A título de ilustração, a Figura 2 mostra um par de segmentos,  $AB$  e  $CD$ , tais que  $\overline{AB} = \frac{7}{3} \cdot \overline{CD}$ , juntamente com os segmentos de comprimento  $v$  tais que  $\overline{CD} = 3 \cdot v$  e  $\overline{AB} = 7 \cdot v$ .

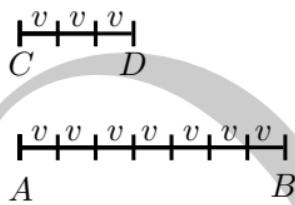


Figura 2: segmentos de razão racional.

Em qualquer um dos dois casos acima, dizemos que os segmentos  $AB$  e  $CD$  são **comensuráveis**. De fato, o segundo caso generaliza o primeiro, pois, no primeiro caso (e nas notações acima), podemos considerar  $EF = CD$  e, assim, obter

$$\overline{AB} = \frac{n}{1} \cdot u = n \cdot u.$$

No Exemplo 1 a seguir, veremos que pode ocorrer de dois segmentos dados  $AB$  e  $CD$  não serem comensuráveis. Dito de outra forma, pode ocorrer de não existir um segmento  $EF$  cujo comprimento seja um *submúltiplo inteiro* dos comprimentos de  $AB$  e  $CD$ . Se esse for o caso, diremos que os segmentos  $AB$  e  $CD$  são **incomensuráveis**.

Para a discussão que segue, precisaremos dos seguintes fatos elementares sobre quadrados perfeitos: *o quadrado de todo inteiro par é par e o quadrado de todo inteiro ímpar é*

ímpar. Podemos justificar essas afirmações da seguinte maneira:

- i. Um inteiro par  $n$  é, por definição, o dobro de algum outro inteiro, digamos  $n = 2k$ , com  $k$  inteiro. Sendo assim, temos

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2,$$

de modo que  $n^2$  também é par, uma vez que é o dobro do inteiro  $2k^2$ .

- ii. Um inteiro ímpar  $n$ , por definição, deixa resto 1 quando dividido por 2; assim,  $n$  é um par mais 1, e podemos escrevê-lo como  $n = 2k + 1$ , para algum inteiro  $k$ . Portanto, temos

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1, \end{aligned}$$

e concluímos que  $n^2$  também é um par mais 1, logo, é ímpar.

**Exemplo 1.** Considere um quadrado  $ABCD$ , como mostrado na Figura 3. Então, os segmentos  $AB$  e  $AC$  são incomensuráveis.

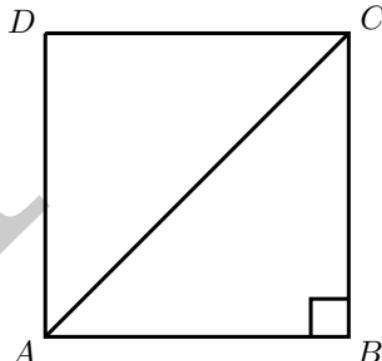


Figura 3: um exemplo de segmentos incomensuráveis.

**Prova.** Com efeito, uma vez que  $\overline{AB} = \overline{BC}$ , o Teorema de Pitágoras<sup>1</sup> garante que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$$

ou, o que é o mesmo,

$$\overline{AC} = \sqrt{2} \cdot \overline{AB}.$$

Se  $AB$  e  $AC$  fossem segmentos comensuráveis, existiriam inteiros positivos  $p$  e  $q$  tais que  $\overline{AC} = \frac{p}{q} \overline{AB}$ ; daí, obteríamos

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \tag{1}$$

isto é,  $\sqrt{2}$  seria um número racional. A seguir, mostraremos que isso não é verdade.

Supondo que (1) valha, e sendo  $d = \text{mdc}(p, q)$ , temos  $p = dm$  e  $q = dn$ , com  $m$  e  $n$  inteiros primos entre si (isto é, tais que  $\text{mdc}(m, n) = 1$ ), e

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{dm}{dn} = \frac{m}{n}.$$

A igualdade acima equivale a  $n\sqrt{2} = m$  ou, elevando ambos os membros ao quadrado, a  $2n^2 = m^2$ . Assim,  $m^2$  é par e, pelas observações que precedem o enunciado do exemplo, isso implica que  $m$  é, ele mesmo, par. Escrevendo  $m = 2m_1$ , com  $m_1$  inteiro, e substituindo na igualdade  $2n^2 = m^2$ , obtemos

$$2n^2 = (2m_1)^2 = 4m_1^2$$

e, daí,  $n^2 = 2m_1^2$ . Assim,  $n^2$  também é par e, novamente pelas observações que precedem o enunciado do exemplo,  $n$  é par. Escrevendo  $n = 2n_1$ , com  $n_1$  inteiro, chegamos à conclusão contraditória de que, por um lado,  $m$  e  $n$  são primos entre si, e, por outro,  $m$  e  $n$  são múltiplos de 2.

<sup>1</sup>Veja a aula *Relações Métricas no Triângulo Retângulo*, nesse mesmo módulo, e o material a ela correspondente.

A partir daí, a única conclusão lógica possível é que nosso raciocínio, apesar de totalmente correto, *partiu de uma premissa falsa*: a de que (1) era uma igualdade verdadeira, quer dizer, que  $\sqrt{2}$  era racional. Então, (1) é falso.

Por sua vez, isso significa que a suposição de que os segmentos  $AB$  e  $AC$  eram comensuráveis, por ter levado a uma conclusão falsa, era ela mesma falsa. Então, os segmentos  $AB$  e  $AC$  são incomensuráveis.  $\square$

Em linguagem moderna, vemos que a *incomensurabilidade* de dois segmentos equivale ao fato de a razão entre seus comprimentos ser um número *irracional*. Na Antiguidade Clássica grega isso não estava claro e, de fato, o exemplo anterior foi o ponto de partida para que os gregos percebessem que os números racionais não esgotavam todas as possibilidades. Isso coube ao astrônomo e matemático grego Eudoxo de Cnidos, um discípulo de Platão, que desenvolveu uma teoria para lidar com quantidades incomensuráveis.

**Observação 2.** *As palavras comensurável e incomensurável nunca devem ser utilizadas em referência a quantidades. De fato, vimos acima que esses conceitos são usados para relacionar duas quantidades, e não para fazer referência a uma só quantidade. Por outro lado, coloquialmente é muito comum encontrar pessoas sem experiência em Matemática falando coisas do tipo: “há uma quantidade incomensurável de estrelas no Universo”. A palavra menos inadequada, nesse caso, seria “incontável”, e a 100% correta<sup>2</sup> seria simplesmente “imensa”.*

<sup>2</sup>Escrevemos *menos inadequada*, ao invés de *adequada*, pelo fato de que, em Matemática, a palavra *incontável* é reservada para fazer referência a uma quantidade infinita que não pode ser *enumerada*, isto é, não pode ser colocada em *correspondência biunívoca* com os números naturais. De certa forma, isso poder ser colocado em palavras dizendo que *uma quantidade incontável é uma quantidade infinita que é maior que o infinito do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$  dos naturais*. Mas, o desenvolvimento rigoroso dessas ideias foge aos nossos propósitos aqui. Se você ficou curioso sobre esse ponto, veja o módulo *Cardinalidade de Conjuntos*, nos *Tópicos Adicionais* do Portal.

Um raciocínio similar ao esboçado no exemplo anterior (utilizando, entretanto, um pouco mais de divisibilidade do que gostaríamos de invocar aqui) garante que se  $ABC$  for um triângulo retângulo em  $B$  e tal que  $\overline{AB} = m \cdot u$  e  $\overline{BC} = n \cdot u$ , com  $m^2 + n^2$  não quadrado perfeito, então, a hipotenusa  $AC$  (que, pelo Teorema de Pitágoras, tem comprimento  $\sqrt{m^2 + n^2} \cdot u$ ) e o cateto  $AB$  (ou o cateto  $BC$ ) não são comensuráveis. A figura abaixo ilustra essa situação.

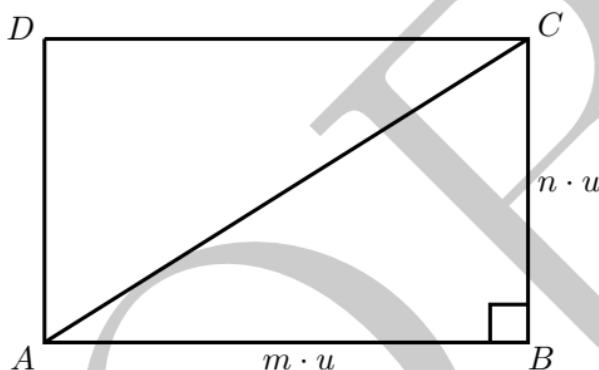


Figura 4: infinitos exemplos de segmentos incomensuráveis.

Terminamos este material com um exemplo ilustrando o conceito de *comensurabilidade de segmentos*.

**Exemplo 3.** Se os três lados de um triângulo  $ABC$  forem comensuráveis dois a dois, mostre que um segmento  $EF$ , cuja medida seja igual ao perímetro do triângulo, e um qualquer um dos lados desse mesmo triângulo, também são comensuráveis.

**Solução.** Como  $AB$  e  $BC$  são comensuráveis, devem existir um segmento de medida  $v$  e inteiros positivos  $m$  e  $n$  tais que  $\overline{AB} = m \cdot v$  e  $\overline{BC} = n \cdot v$ . Por outro lado,  $BC$  e  $AC$  também são comensuráveis. Logo, devem existir um segmento de medida  $w$  e inteiros positivos  $p$  e  $q$  tais que  $\overline{BC} = p \cdot w$  e  $\overline{AC} = q \cdot w$ .

Agora, dividimos o segmento  $BC$  em  $np$  segmentos, todos

de medida  $\frac{\overline{BC}}{np} = u$ . Desse modo, temos

$$np \cdot u = \overline{BC} = n \cdot v \quad \text{e} \quad np \cdot u = \overline{BC} = p \cdot w,$$

de onde obtemos, respectivamente,

$$p \cdot u = v \quad \text{e} \quad n \cdot u = w.$$

Portanto,

$$\overline{AC} = q \cdot w = qn \cdot u \quad \text{e} \quad \overline{AB} = m \cdot v = mp \cdot u.$$

Concluímos que o segmento  $EF$ , que tem medida igual ao perímetro do triângulo  $ABC$ , tem medida

$$\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (mp + qn + np) \cdot u.$$

Logo,  $EF$  é comensurável com  $BC$ , e um argumento análogo garante que  $EF$  também é comensurável com  $AC$  e  $AB$ .  $\square$

## Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada pelo menos uma sessão de 50min para expor o conteúdo desta aula. Faça alguns casos particulares, nos quais a razão entre os dois segmentos seja um número inteiro, e em seguida faça outros exemplos nos quais essa razão seja um número racional, pois isso facilitará a compreensão.

Ao expor o Exemplo 1, saliente que o fato crucial para que aqueles segmentos sejam incomensuráveis é que  $\sqrt{2}$  é um número *irracional*. Mais informações sobre números irracionais podem ser encontradas nas referências [1] e [3]. O Exemplo 1.24 da referência [2] explica a situação mais geral descrita logo após a Observação 2. Caso você decida abordá-la, recomendamos utilizar uma sessão adicional.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2024.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2022.
3. E. L. Lima, P. C. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2016.