Material Teórico - Módulo de FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO

Exercícios sobre Frações

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda

Portal da Matemática
OBMEP

1 Aula de Exercícios

Nesta aula, iremos resolver alguns exercícios que nos ajudarão a fixar melhor as ideias apresentadas na aula passada. Começaremos com um conto matemático retirado do excelente livro escrito por Júlio César de Mello e Souza sob o pseudônimo de Malba Tahan (ver [1]).

OS TRINTA E CINCO CAMELOS

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos, perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Por entre pragas e impropérios, gritavam possessos, furiosos:

— Não pode ser!

— Isto é um roubo!

— Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

— Somos irmãos — esclareceu o mais velho — e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo eu receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte, e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos. A cada partilha proposta, segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio! Como fazer a partilha, se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?

— É muito simples — atalhou o "homem que calculava".

— Encarregar-me-ei de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal, que em boa hora aqui nos trouxe.

Neste ponto, procurei intervir na questão:

— Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o nosso camelo?

— Não te preocupes com o resultado, ó "bagdali"! — replicou-me, em voz baixa, Beremiz. — Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás, no fim, a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal, que imediatamente foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

— Vou, meus amigos — disse ele, dirigindo-se aos três irmãos — fazer a divisão justa e exata dos camelos, que são agora, como vêem, em número de 36.

E voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

— Deves receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36, ou seja, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saiste lucrando com esta divisão.

Dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

— E tu, Hamed Namir, devias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saiste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais moço:

designed by freepik.com

— E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, devias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e pouco. Vais receber um nono de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado.

Numa voz pausada e clara, concluiu:

— Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir — partilha em que todos os três saíram lucrando — couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um total de 34 camelos. Dos 36 camelos sobraram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao "bagdali" meu amigo e companheiro; outro, por direito, a mim, por ter resolvido a contento de todos o complicado problema da herança.

— Sois inteligente, ó estrangeiro! — confessou, com admiração e respeito, o mais velho dos três irmãos. — Aceitamos a vossa partilha, na certeza de que foi feita com justiça e equidade. E o astucioso Beremiz — o "homem que calculava" — tomou logo posse de um dos mais belos camelos do grupo, e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

— Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro. Tenho outro, especialmente para mim. E continuamos a nossa jornada para Bagdá.

* * *

Exercício 1. *Como o "homem que calculava" conseguiu resolver o problema dos três irmãos, que aparentemente saíram no lucro, e ainda assim ganhou um camelo extra?*

Solução. A resposta para o mistério do conto é a seguinte: observe que a soma das partes que seriam destinadas às heranças dos três irmãos não somam 1, porque

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}<1.$$

Para verificar tal fato, lembre-se primeiro de que, antes de somar frações com denominadores diferentes, devemos substituir essas frações por suas respectivas frações equivalentes, tendo um mesmo denominador. Faremos isso seguindo os passos abaixo:

(i) Calculamos o mínimo múltiplo comum entre 2, 3 e 9. Utilizando-se o método densenvolvido no módulo sobre Divisibilidade, temos que $\operatorname{mmc}(2,3,9) = 18$.

(ii) Para obter uma fração com denominador 18 e equivalente a $\frac{1}{2}$, devemos multiplicar o númerador e denominador desta fração por 9:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{9}{18}.$$

(iii) Para obter uma fração com denominador 18 e equivalente a $\frac{1}{3}$, devemos multiplicar o númerador e denominador desta fração por 6:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{6}{18}.$$

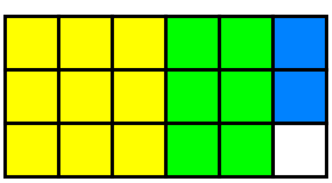
(iv) Para obter uma fração com denominador 18 e equivalente a $\frac{1}{9}$, devemos multiplicar o númerador e denominador desta fração por 2:

$$\frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{2}{18}.$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18} < 1.$$

Podemos, então, representar a divisão da herança utilizando a seguinte figura de um retângulo dividido em 18 partes iguais:



A região amarela representa a herança que foi prometida ao primeiro filho: $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$. A região verde representa a herança prometida ao filho do meio ($\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$) e a região azul representa a heranca do filho mais jovem ($\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$). Perceba que, por um erro cometido pelo pai, $\frac{1}{18}$ da herança não foi designada a ninguém. É exatamente essa parte que o homem que calculava tomou para si. Veja que $\frac{1}{18}$ do grupo de 36 camelos corresponde a 2 camelos. □

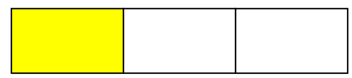
Outro problema que possui uma linha de raciocício semelhante à do problema anterior é o do exemplo a seguir.

Exercício 2. *Maria foi trabalhar e deixou dinheiro para seus três filhos, com este bilhete:*

Dividam o dinheiro igualmente. Beijos!

O primeiro filho chegou, pegou sua parte do dinheiro e saiu. O segundo filho chegou e não viu ninguém. Pensando que era o primeiro, pegou sua parte do dinheiro e saiu. O terceiro encontrou quatro notas de 5 reais. Achou que era o último, pegou tudo e saiu. Quanto em dinheiro a mãe havia deixado para seus filhos?

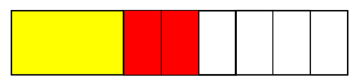
Solução. Vamos representar o valor em dinheiro deixado pela mãe por uma *barra*. O primeiro filho pega para si, a terça parte do valor total deixado pela mãe. Isso é representado pela região amarela, mostrada na figura a seguir:



Dessa forma, ele deixa $\frac{2}{3}$ (dois terços) do valor para os irmãos. Porém, o próximo filho pega $\frac{1}{3}$ do valor restante. Ou seja,

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Isso pode ser ilustrado como:



Dessa forma, cada região vermelha representa $\frac{1}{9}$ da barra inicial. Portato, fica fácil perceber que o terceiro filho recebe $\frac{4}{9}$ do valor inicial. Como é dito no enunciado que ele recebe 20 reais, isso significa que cada região que equivale a $\frac{1}{9}$ da barra corresponde ao valor de 5 reais. Logo, a mãe deixou um total de 45 reais. □

Exercício 3. *Simplificando a fração*

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004}$$

obtemos:

a) 2004.

b) $\frac{113}{355}$.

c) $\frac{1}{2004}$.

d) $\frac{2}{3}$.

e) $\frac{2}{7}$.

Solução. A escolha deste exercício foi proposital. Muitos alunos tentam simplificar esta fração utilizando o seguinte raciocínio:

$$\frac{\cancel{2004} + \cancel{2004}}{\cancel{2004} + \cancel{2004} + 2004} = \frac{1}{2004}.$$

Apesar da tentativa, tal raciocício não possui lógica matemática. Como vimos na aula anterior, a operação de simplificação de uma fração representa uma divisão do numerador e do denominador por um mesmo número. Quando "cancelamos" dois números 2004 do numerador com dois números 2004 do denominador, não estamos realizando nenhum tipo de divisão. O que podemos fazer é o seguinte:

Note que

$$2004 + 2004 = 2 \cdot 2004;$$

$$2004 + 2004 + 2004 = 3 \cdot 2004.$$

Daí,

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004} = \frac{2 \cdot \cancel{2004}}{3 \cdot \cancel{2004}} = \frac{2}{3}$$

No raciocício acima, dividimos tanto o numerador quanto o denominador por 2004. Portanto, a resposta correta para o exercício é $\frac{2}{3}$. □

Exercício 4. *Simplifique a seguinte expressão:*

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Solução. Observe que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e assim por diante.

Portanto, o valor da expressão é

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}.$$

Podemos dividir tanto o numerador como o denominador pelo produto $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 98 \cdot 99$. Assim fazendo, concluímos que a resposta do exercício é $\frac{1}{100}$. □

Finalizaremos nossa aula com alguns exercícios um pouco mais técnicos do que os anteriores. O objetivo, aqui, é treinar as quatro operações básicas em expressões numéricas que envolvam frações.

Exercício 5. *Escreva o resultado da seguinte expressão numérica:*

$$\frac{7}{2} \div \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{12} - \frac{1}{9}.$$

Solução. Este é o tipo mais simples de expressão numérica, já que não há nenhum tipo de parênteses. Então, resolvendo primeiro as operações de multiplicação e divisão, obtemos

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 12} - \frac{1}{9}.$$

A segunda fração pode ser simplificada dividindo o numerador e o denominador por 2, de forma que chegamos a

$$\frac{21}{6} + \frac{5}{18} - \frac{1}{9}.$$

Agora que não há mais operações de multiplicação ou divisão a fazer, podemos realizar as operações de adição e subtração. Para isso, vamos reduzir todas as frações ao mesmo denominador que, nesse caso, pode ser 18. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{63}{18} + \frac{5}{18} - \frac{2}{18}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{66}{18}.$$

Por fim, veja que essa última fração pode ser simplificada dividindo seus termos por 6, o que nos dá o resultado final

$$\frac{11}{3}.$$

Exercício 6. *Escreva o resultado da seguinte expressão numérica:*

$$1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1+4}}.$$

Solução. Quando temos frações de frações, a ideia é sempre começar simplificando os termos mais "baixos". Assim fazendo, obtemos que fração do enunciado é

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{5}} &= 1 + \frac{2}{\frac{5}{5} + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{2}{\frac{8}{5}} \\ &= 1 + 2 \div \frac{8}{5} = 1 + 2 \cdot \frac{5}{8} \\ &= 1 + \frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 7. *Escreva o resultado da seguinte expressão numérica:*

$$5 - \frac{1}{2} \cdot \left(2 \div \frac{5}{3} + 1\right).$$

Solução. Quando há parênteses, deve-se resolver primeiro as expressões numéricas neles contidas. Assim,

$$\begin{aligned} 5 - \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{5} + 1\right) &= 5 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{5}\right) \\ &= 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

Agora que já não há mais parênteses, resolvemos a última expressão acima como no exercício 5:

$$5 - \frac{11}{10} = \frac{50}{10} - \frac{11}{10} = \frac{39}{10}.$$

2 Sugestões ao professor

Em geral, os alunos se mostram muito mais interessados em resolver problemas que envolvam algum tipo de conto ou situação específica do que exercícios mais abstratos, como simplicações de expressões numéricas. Apesar desse último tipo de exemplo ser de grande importância para a fixação dos conceitos básicos de operações com frações, o aprendizado se dá de maneira muito mais eficaz em exercícios que simulam algum tipo de situação. O livro "O Homem que Calculava" é uma excelente fonte de execícios deste tipo. Se for o caso, ele pode ser usado em conjunto com o professor de artes de sua escola, com objetivos interdisciplinares.

Referências

[1] Malba Tahan. *O Homem que Calculava*. Record, 2001.