**Material Teórico - Módulo Frações Algébricas**

**Resolução de Exercícios**

**Oitavo Ano**

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

# 1 Resolução de exercícios

Nesse material, apresentamos alguns exemplos envolvendo simplificação de frações algébricas.

**Exemplo 1** (EPCAR). *O valor da expressão*

$$P = \left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}\right),$$

*em que* $x, y \in \mathbb{R}^*$, $x \neq y$ *e* $x \neq -y$, *é:*

*(a)* $-1$.

*(b)* $-2$.

*(c)* $1$.

*(d)* $2$.

**Solução.** Observe que

$$\begin{aligned} x^{-2} - y^{-2} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{x^2y^2} \\ &= \frac{(y - x) \cdot (y + x)}{x^2y^2}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade acima, utilizamos a fórmula para a diferença de dois quadrados. Por outro lado, temos também:

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy}.$$

Quanto ao numerador da segunda fração, pondo o fator $xy$ em evidência, obtemos:

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}\right) \\ &= \frac{\frac{(y-x)\cdot(y+x)}{x^2y^2}}{\frac{y+x}{xy}} \cdot \frac{xy(x + y)}{(x + y)(x - y)} \\ &= \frac{(y - x) \cdot \cancel{(y + x)}}{x^2y^2} \cdot \frac{xy}{\cancel{y + x}} \cdot \frac{xy\cancel{(x + y)}}{\cancel{(x + y)}(x - y)} \\ &= \frac{y - x}{\cancel{x^2y^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2y^2}}{x - y} = \frac{-\cancel{(x - y)}}{\cancel{x - y}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Segue que a alternativa correta é a letra (a). □

**Exemplo 2** (EPCAR). *Analise cada afirmativa abaixo e classifique-a em (V) verdadeira ou (F) falsa:*

*(i) Se* $x$, $y$ *e* $z$ *são números reais dois a dois distintos, então*

$$\frac{1}{(x - y)(x - z)} + \frac{1}{(y - x)(y - z)} + \frac{1}{(z - x)(z - y)} = 0.$$

*(ii) Se* $p, q \in \mathbb{R}^*$ *e* $p \neq q$, *então, ao simplificar a fração algébrica*

$$E = \left[\frac{p^2 + pq}{p^2 - q^2} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right]^{-1}$$

*obtemos* $q$.

*(iii) Sejam* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tais que* $x > 0$, $y < 0$ *e* $z \neq 0$. *Então* $\frac{x^7y^5}{z^{30}} < 0$.

*A sequência correta é:*

*(a) V-V-V.*

*(b) V-F-V.*

*(c) F-F-V.*

*(d) V-V-F.*

**Solução.** Em relação à expressão do item (a), temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x - y)(x - z)} + \frac{1}{(y - x)(y - z)} + \frac{1}{(z - x)(z - y)} = \\ &= \frac{(z - y) - (z - x) + (y - x)}{(z - x)(z - y)(y - x)} \\ &= \frac{\cancel{z} - \cancel{y} - \cancel{z} + \cancel{x} + \cancel{y} - \cancel{x}}{(z - x)(z - y)(y - x)} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação (i) é verdadeira.

Para (b), veja que

$$p^2 + pq = p(p + q),$$
$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$$

e

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{q - p}{pq}.$$

Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} E &= \left[\frac{p^2 + pq}{p^2 - q^2} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{\cancel{p}\cancel{(p + q)}}{(p - q)\cancel{(p + q)}} \cdot \frac{q - p}{\cancel{p}q}\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{-\cancel{(p - q)}}{\cancel{(p - q)} \cdot q}\right]^{-1} \\ &= \left(-\frac{1}{q}\right)^{-1} = -q. \end{aligned}$$

Assim, (ii) é falsa.

Finalmente, se $x, y, z \in \mathbb{R}$ são tais que $x > 0$, $y < 0$ e $z \neq 0$, temos $x^7 > 0$, $y^5 < 0$ e $z^{30} > 0$. Portanto, $x^7y^5 < 0$, e segue que

$$\frac{x^7y^5}{z^{30}} < 0.$$

Desse modo, a afirmação (iii) é verdadeira.

Concluímos que a sequência correta é V-F-V, ou seja, a alternativa correta é (b). □

**Exemplo 3.** *Simplifique a fração algébrica abaixo:*

$$\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}.$$

**Solução.** Inicialmente, podemos escrever

$$x^4+y^4-6x^2y^2=x^4+y^4-2x^2y^2-4x^2y^2.$$

Utilizando a fórmula para o quadrado da diferença de dois termos, obtemos:

$$(x^2-y^2)^2=(x^2)^2-2x^2y^2+(y^2)^2=x^4-2x^2y^2+y^4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}&=\frac{(x^4+y^4-2x^2y^2)-4x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}\\&=\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}.\end{aligned}\tag{1}$$

Agora, utilizando a fórmula para a diferença de dois quadrados, podemos escrever também:

$$\begin{aligned}(x^2-y^2)^2-4x^2y^2&=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2\\&=(x^2-y^2-2xy)\cdot(x^2-y^2+2xy).\end{aligned}$$

Por fim, substituindo a última expressão encontrada acima em (1), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}&=\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2}{x^2-y^2+2xy}\\&=\frac{(x^2-y^2-2xy)\cdot\cancel{(x^2-y^2+2xy)}}{\cancel{x^2-y^2+2xy}}\\&=x^2-y^2-2xy.\end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.** *Simplifique a expressão algébrica:*

$$\frac{\left(x^3-y^3-z^3\right)^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{y^3+z^3}.$$

**Solução.** Aqui, utilizaremos inicialmente a fórmula para a diferença de dois quadrados, aplicada ao numerador da expressão dada:

$$\begin{aligned}&\left(x^3-y^3-z^3\right)^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)^2=\\&=\left[\left(x^3-y^3-z^3\right)-\left(x^3+y^3+z^3\right)\right]\\&\quad\cdot\left[\left(x^3-y^3-z^3\right)+\left(x^3+y^3+z^3\right)\right]\\&=\left[\cancel{x^3}-y^3-z^3-\cancel{x^3}-y^3-z^3\right]\cdot\\&\quad\cdot\left[x^3-\cancel{y^3}-\cancel{z^3}+x^3+\cancel{y^3}+\cancel{z^3}\right]\\&=-2\left(y^3+z^3\right)\cdot 2x^3\\&=-4x^3(y^3+z^3).\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}\frac{\left(x^3-y^3-z^3\right)^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{y^3+z^3}&=\frac{-4x^3\cancel{(y^3+z^3)}}{\cancel{y^3+z^3}}\\&=-4x^3.\end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.** *Considere as frações algébricas abaixo, em que $a\neq b$:*

$$P=\frac{a^6-b^6}{a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5}$$

*e*

$$Q=\frac{a^8-b^8}{a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6}.$$

*Assim, tem-se que $\frac{Q}{P}$ é igual a:*

*(a)* $\frac{1}{a-b}$.

*(b)* $\frac{1}{a+b}$.

*(c)* $a+b$.

*(d)* $a-b$.

**Solução.** Começamos notando que

$$a^5-a^4b+a^3b^2=a^3(a^2-ab+b^2)$$

e

$$-a^2b^3+ab^4-b^5=-b^3(a^2-ab+b^2).$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}&a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5=\\&=a^3(a^2-ab+b^2)-b^3(a^2-ab+b^2)\\&=(a^3-b^3)\cdot(a^2-ab+b^2).\end{aligned}$$

Agora, utilizamos a fórmula para a diferença de dois quadrados para obter:

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)\cdot(a^3-b^3).$$

Além disso, já sabemos que:

$$a^3+b^3=(a^2-ab+b^2)\cdot(a+b).$$

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned}P&=\frac{a^6-b^6}{a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5}\\&=\frac{(a^3+b^3)\cdot\cancel{(a^3-b^3)}}{\cancel{(a^3-b^3)}\cdot(a^2-ab+b^2)}\\&=\frac{\cancel{(a^2-ab+b^2)}\cdot(a+b)}{\cancel{a^2-ab+b^2}}\\&=a+b.\end{aligned}$$

Quanto a $Q$, por um lado temos:

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4)^2 - (b^4)^2 \\ &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) \\ &= ((a^2)^2 - (b^2)^2) \cdot (a^4 + b^4) \\ &= (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4); \end{aligned}$$

por outro, agrupando termos conforme mostrado abaixo, segue que

$$\begin{aligned} \underbrace{a^6 + a^4b^2}_{} + \underbrace{a^2b^4 + b^6}_{} &= a^4(a^2 + b^2) + b^4(a^2 + b^2) \\ &= (a^4 + b^4) \cdot (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a^8 - b^8}{a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6} \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \cdot \cancel{(a^2 + b^2)} \cdot \cancel{(a^4 + b^4)}}{\cancel{(a^4 + b^4)} \cdot \cancel{(a^2 + b^2)}} \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos a partir dos cálculos acima que

$$\frac{Q}{P} = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a - b) \cdot \cancel{(a + b)}}{\cancel{a + b}} = a - b.$$

Logo, a opção correta é a letra (c). □

**Exemplo 6.** *Considere os números reais $a$, $b$ e $x$, tais que $a + b = x$, $a - b = x^{-1}$, $a \neq \pm b$ e $a \neq 0$. O valor da expressão*

$$Y = \frac{\frac{(a^2+2ab+b^2)\cdot(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)}}{\frac{a^2-ab}{2a}}$$

*é igual a:*

*(a)* $2$.

*(b)* $2x^2$.

*(c)* $x^2$.

*(d)* $\frac{x^2}{2}$.

**Solução.** Utilizando, mais uma vez, os produtos notáveis conhecidos como quadrado da soma, diferença de dois quadrados e diferença de dois cubos, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\frac{(a^2+2ab+b^2)\cdot(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)}}{\frac{a^2-ab}{2a}} \\ &= \frac{(a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2) \cdot (a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{2a}{a^2 - ab} \\ &= \frac{(a + b)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{(a - b)} \cdot \cancel{(a^2 + ab + b^2)}}{\cancel{(a - b)} \cdot \cancel{(a + b)} \cdot \cancel{(a^2 + ab + b^2)}} \cdot \frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}(a - b)} \\ &= \frac{2(a + b)}{a - b}. \end{aligned}$$

Mas, como $a + b = x$ e $a - b = x^{-1}$, temos:

$$Y = \frac{2x}{x^{-1}} = \frac{2x}{1/x} = 2x \cdot x = 2x^2.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (b). □

## Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadam duas sessões de 50min cada para discutir os exemplos que compõem esse material. Antes de começar a expô-los, faça uma lista com os produtos notáveis que serão utilizados. Ao fazer cada simplificação, chame a atenção dos alunos para os produtos notáveis aplicados em cada passagem.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.