

# **Material Teórico - Módulo Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria**

## **Equivalências Afins e Aplicações - Parte I**

### **Tópicos Adicionais**

**Autor: Tiago Caúla Ribeiro**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**10 de Março de 2022**



**PORTAL DA  
MATEMÁTICA**  
OBMEP

# 1 Equivalências Afins

Em aulas anteriores, discutimos a relação entre transformações lineares e geometria posicional: uma aplicação linear invertível  $T$  transforma retas em retas, preservando concorrência e paralelismo. Essas mesmas propriedades são compartilhadas pelas equivalências afins, pois uma equivalência afim é, essencialmente, a composição de uma aplicação linear invertível com uma translação. O Lema 12 da 2ª aula desse módulo se traduz no seguinte resultado fundamental.

**Teorema 1.** *Dadas duas ternas  $(A, B, C)$  e  $(A', B', C')$  de pontos não-colineares no plano  $\Pi$ , existe uma única equivalência afim  $F : \Pi \rightarrow \Pi$  satisfazendo  $F(A) = A'$ ,  $F(B) = B'$  e  $F(C) = C'$ .*

Antes de iniciar a demonstração, lembre que, fixado um ponto  $O \in \Pi$ , uma equivalência afim  $F : \Pi \rightarrow \Pi$  se escreve, por definição, como  $F(P) = O + [S(\overrightarrow{OP}) + v]$ , sendo  $S$  uma transformação linear invertível e  $v$  um vetor (veja a aula anterior). Nesse caso, escreveremos  $F|_O = S + v$ . Observe que  $S$  e  $v$  ficam completamente determinados por  $F$ , pois  $v = \overrightarrow{OF(O)}$ , enquanto que  $S(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{F(O)F(P)}$ , qualquer que seja o ponto  $P \in \Pi$ .

**Demonstração do Teorema (1).** Tome  $F|_A = S + v$ , em que  $S$  transforma o par  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  no par  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$  (Lema 12 já citado) e  $v = \overrightarrow{AA'}$ . Temos  $F(B) = A + [S(\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AA'}] = A + (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'}) = A + \overrightarrow{AB'} = B'$  e a verificação das igualdades  $F(A) = A'$ ,  $F(C) = C'$  não oferece maiores dificuldades. Como  $S$  é invertível (por quê?),  $F$  é uma equivalência afim. Só falta mostrar que  $F$  é a única que transforma  $(A, B, C)$  em  $(A', B', C')$ . Se  $G$  é uma equivalência afim cumprindo com a mesma condição, escreva  $G|_A = T + w$  e note que  $w = \overrightarrow{AG(A)} = \overrightarrow{AA'} = v$ . Portanto,  $T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AG(B)} - w = \overrightarrow{AB'} - v = S(\overrightarrow{AB})$  e, analogamente,  $T(\overrightarrow{AC}) = S(\overrightarrow{AC})$ , de onde se conclui que  $T = S$  e daí  $G = F$ .  $\square$

A Proposição 11 e a discussão subsequente, presentes na 2ª aula do presente módulo, nos permitem enunciar a

**Proposição 2.** *Toda equivalência afim transforma elipses em elipses, transformando centros em centros. Além disso, toda elipse é a imagem de um círculo <sup>1</sup> por uma equivalência afim.*

A classe das equivalências afins do plano é fechada para as operações de composição e inversão. De fato, se  $F|_O = S + v$  e  $G|_O = T + w$ , não é difícil verificar que  $(G \circ F)|_O = (T \circ S) + [T(v) + w]$  e  $F^{-1}|_O = S^{-1} + [-S^{-1}(v)]$ . Em particular, elipses são indistinguíveis do ponto de vista afim: se o círculo  $C$  for transformado nas elipses  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  pelas equivalências afins  $F$  e  $G$ , respectivamente, então a equivalência afim  $G \circ F^{-1}$  transforma  $\mathcal{E}$  em  $\mathcal{E}'$ .

Como equivalências afins preservam retas paralelas, também preservam paralelogramos. Falando nisso, segue uma versão do Teorema (1) com paralelogramos no lugar de triângulos.

**Teorema 3.** *Dados dois paralelogramos  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ , existe uma única equivalência afim  $F : \Pi \rightarrow \Pi$  satisfazendo  $F(A) = A'$ ,  $F(B) = B'$ ,  $F(C) = C'$  e  $F(D) = D'$ .*

**Definição 4.** *Diremos que dois subconjuntos do plano  $S$  e  $S'$  são afim-equivalentes se existe uma equivalência afim transformando  $S$  em  $S'$ . Nesse caso, escreveremos  $S \bowtie S'$ .*

Por exemplo,  $S \bowtie S'$  se  $S$  e  $S'$  são dois triângulos, ou dois paralelogramos ou duas elipses. Perceba que “ $\bowtie$ ” é uma relação de equivalência no conjunto das partes do plano  $\Pi$ .

**Observação 5.** *Ao longo das nossas aulas, já nos deparamos com três relações de equivalência relevantes em Geometria: “ $\equiv$ ”, congruência, “ $\sim$ ”, semelhança, e agora a relação “ $\bowtie$ ” de afim-equivalência. Como toda isometria do plano é uma semelhança e toda semelhança é uma equivalência afim, temos  $S \equiv S' \Rightarrow S \sim S' \Rightarrow S \bowtie S'$ . Veremos na seção de aplicações*

---

<sup>1</sup>Como quaisquer dois círculos são semelhantes, podemos supor que o círculo do qual o teorema trata é o mesmo para todas as elipses.

como aproveitar essa maior flexibilidade da relação de afinidade na resolução de problemas geométricos.

Dados três pontos colineares distintos  $P$ ,  $Q$  e  $X$ , a **razão orientada**  $\frac{PX}{XQ}$  é definida como  $\frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{XQ}}$ , caso os vetores  $\overrightarrow{PX}$  e  $\overrightarrow{XQ}$  tenham mesmo sentido, ou  $-\frac{PX}{XQ}$ , se os vetores  $\overrightarrow{PX}$  e  $\overrightarrow{XQ}$  tiverem sentidos opostos. De outro modo, a razão orientada  $\frac{PX}{XQ}$  é o único número real satisfazendo

$$\overrightarrow{PX} = \frac{PX}{XQ} \cdot \overrightarrow{XQ}.$$

Com essa definição, temos a

**Proposição 6.** *Equivalências afins preservam razões orientadas:*

$$\frac{F(P)F(X)}{F(X)F(Q)} = \frac{PX}{XQ}, \quad (1)$$

para toda equivalência afim  $F : \Pi \rightarrow \Pi$  e para quaisquer pontos colineares distintos  $P, Q, X \in \Pi$ .

**Demonstração.** Escreva  $F|_X = S + v$ , em que  $v = \overrightarrow{XF(X)}$ . Daí, vale  $\overrightarrow{F(X)F(P)} = S(\overrightarrow{XP})$  e  $\overrightarrow{F(X)F(Q)} = S(\overrightarrow{XQ})$ . Como  $\overrightarrow{PX} = \frac{PX}{XQ} \cdot \overrightarrow{XQ}$ , a primeira igualdade pode ser reescrita como  $\overrightarrow{F(P)F(X)} = \frac{PX}{XQ} \cdot S(\overrightarrow{XQ})$ , de onde se conclui que  $\overrightarrow{F(P)F(X)} = \frac{PX}{XQ} \cdot \overrightarrow{F(X)F(Q)}$ . Da definição de razão orientada, segue a relação (1).  $\square$

**Observação 7.** *Nas notações da Proposição (6), note que  $X$  está entre  $P$  e  $Q$  se, e só se,  $F(X)$  está entre  $F(P)$  e  $F(Q)$ . Nesse caso, a relação (1) ainda nos garante que  $F(X)$  divide o segmento  $F(P)F(Q)$  na mesma razão em que  $X$  divide o segmento  $PQ$ , ou seja,*

$$\frac{\overline{F(P)F(X)}}{\overline{F(X)F(Q)}} = \frac{PX}{XQ}. \quad (2)$$

*Em particular, equivalências afins preservam ponto médio.*

Uma pergunta natural: *sob quais condições dois quadriláteros convexos são afim-equivalentes?* O próximo teorema nos fornece um critério.

**Teorema 8.** *Dados dois quadriláteros convexos  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ , sejam  $P$  o ponto de encontro das diagonais de  $ABCD$  e  $P'$  o ponto de interseção das diagonais de  $A'B'C'D'$ . Então,  $ABCD$  é afim-equivalente a  $A'B'C'D'$  se, e só se,  $P$  divide as diagonais de  $ABCD$  na mesma razão em que  $P'$  divide as diagonais de  $A'B'C'D'$ .*

**Demonstração.** Se existe uma equivalência afim que transforma  $ABCD$  em  $A'B'C'D'$ , então essa mesma equivalência aplica  $AC$  em  $A'C'$  e  $BD$  em  $B'D'$ . Logo,  $P'$  é a imagem de  $P$ . Por (2), vem  $\frac{AP}{PC} = \frac{A'P'}{P'C'}$  e  $\frac{BP}{PD} = \frac{B'P'}{P'D'}$ , estabelecendo a 1ª parte da demonstração.

Reciprocamente, suponhamos que  $P$  divida as diagonais  $AC$  e  $BD$  nas mesmas razões em que  $P'$  divide  $A'C'$  e  $B'D'$ . Seja  $XYZW$  o paralelogramo que passa pelos vértices de  $ABCD$  e tem os seus lados paralelos as diagonais  $AC$  e  $BD$ , com  $A \in XY, B \in YZ, C \in ZW$  e  $D \in WX$ . O paralelogramo  $X'Y'Z'W'$  é definido de forma similar, relativamente a  $A'B'C'D'$ . Se  $F: \Pi \rightarrow \Pi$  é a equivalência afim que transforma  $XYZW$  em  $X'Y'Z'W'$  (Teorema (3)), afirmamos que  $F$  aplica  $ABCD$  em  $A'B'C'D'$ . De fato, vejamos apenas que  $F(A) = A'$ , pois são análogas as demonstrações das outras igualdades.

Sendo  $APDX$  e  $AYBP$  paralelogramos, e levando em conta a relação (2), temos  $\frac{X'F(A)}{F(A)Y'} = \frac{XA}{AY} = \frac{DP}{PB}$ . Da mesma forma, vale  $\frac{X'A'}{A'Y'} = \frac{D'P'}{P'B'}$ . Como  $\frac{DP}{PB} = \frac{D'P'}{P'B'}$  por hipótese, concluímos que  $\frac{X'F(A)}{F(A)Y'} = \frac{X'A'}{A'Y'}$ . Portanto,  $F(A)$  e  $A'$  dividem o segmento  $X'Y'$  na mesma razão, de modo que  $F(A) = A'$ .  $\square$

Se uma equivalência afim  $F$  transforma o triângulo  $ABC$  no triângulo  $A'B'C'$ , então  $F$  transforma as medianas de  $ABC$  nas medianas de  $A'B'C'$ . Em particular,  $F$  transforma

baricentros em baricentros. Como uma equivalência afim, em geral, não preserva perpendicularidade (a menos que seja uma semelhança), não podemos esperar que  $F$  também preserve alturas ou bissetrizes. Na verdade, vale o seguinte:

**Proposição 9.** *Dadas três cevianas internas e concorrentes de um triângulo  $ABC$ , existe um triângulo  $A'B'C'$  e uma equivalência afim transformando  $ABC$  em  $A'B'C'$  e levando as cevianas de  $ABC$  nas alturas de  $A'B'C'$ .*

Precisaremos de um lema (equivalente à proposição). Denote a área de uma região  $\mathcal{R}$  do plano por  $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ .

**Lema 10.** *Seja  $ABDE$  um quadrilátero convexo. Se as semirretas  $\overrightarrow{AE}$  e  $\overrightarrow{BD}$  se intersectam, então existe um quadrilátero convexo  $A'B'D'E'$ , afim-equivalente a  $ABDE$ , satisfazendo  $\widehat{A'D'B'} = \widehat{A'E'B'} = 90^\circ$ .*

**Demonstração.** Denote por  $P$  o ponto de encontro das diagonais de  $ABDE$ . Sejam  $a = \overline{AP}$ ,  $b = \overline{PD}$ ,  $c = \overline{BP}$ ,  $d = \overline{PE}$  e  $\alpha = \widehat{APB}$ . Afirmamos que  $bd < ac$ . De fato, sendo a altura do triângulo  $BED$  menor que a altura do triângulo  $BAD$ , vale  $\mathcal{A}(BED) < \mathcal{A}(BAD)$ , ou seja,  $\mathcal{A}(PED) + \mathcal{A}(BPD) < \mathcal{A}(BAP) + \mathcal{A}(BPD)$ , de onde se conclui que  $\mathcal{A}(PED) < \mathcal{A}(BAP)$ . Lembrando que a área de um triângulo é o semiproduto de dois lados vezes o seno do ângulo compreendido, podemos reescrever a desigualdade anterior como  $\frac{bd \operatorname{sen} \alpha}{2} < \frac{ac \operatorname{sen} \alpha}{2}$ , o que nos dá a desigualdade desejada.

Agora fixe um círculo unitário  $\mathcal{C}$  e um diâmetro  $A'B'$  em  $\mathcal{C}$ .

**AFIRMAÇÃO:** os círculos tangentes internamente a  $\mathcal{C}$  nos pontos  $A', B'$  e de raios  $\frac{a}{a+b}, \frac{c}{c+d}$ , respectivamente, são secantes.

Lembrando que dois círculos são secantes se, e só se, a distância entre os centros desses círculos for menor que a soma dos raios, devemos provar que  $2 - \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right) < \frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}$ , ou seja,  $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}$ . Um pouco de álgebra elementar simples reduz essa desigualdade à desigualdade equivalente  $bd < ac$  que, como sabemos, é verdadeira.

Assim, sejam  $P'$  um ponto na interseção daqueles dois círculos e  $D', E'$  os pontos de interseção das semirretas  $\overrightarrow{A'P'}$  e  $\overrightarrow{B'P'}$  com  $\mathcal{C}$ , respectivamente. Pelo Exemplo 7 da 2ª aula do módulo “Geometria das Transformações Lineares”, temos  $\frac{A'P'}{A'D'} = \frac{a}{a+b}$  e  $\frac{B'P'}{B'E'} = \frac{c}{c+d}$ , de onde segue que  $\frac{A'P'}{P'D'} = \frac{a}{b}$  e  $\frac{B'P'}{P'E'} = \frac{c}{d}$ . Dessa forma,  $P'$  divide as diagonais de  $A'B'D'E'$  nas mesmas razões em que  $P$  divide as diagonais de  $ABDE$ . Pelo Teorema (8),  $A'B'D'E'$  é afim-equivalente a  $ABDE$ .

Para finalizar, note que os ângulos  $\angle A'D'B'$  e  $\angle A'E'B'$  subtendem um semicírculo, de modo que  $\widehat{A'D'B'} = \widehat{A'E'B'} = 90^\circ$ .  $\square$

Podemos finalmente demonstrar o resultado desejado.

**Demonstração da Proposição (9).** Sejam  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  as cevianas de  $ABC$ , concorrentes no ponto  $P$ . Pelo Lema (10), existe uma equivalência afim  $\psi$  que transforma  $ABDE$  em um quadrilátero  $A'B'D'E'$ , tal que  $\widehat{A'D'B'} = \widehat{A'E'B'} = 90^\circ$ . Se  $C' = \psi(C)$ , o triângulo  $ABC$  é transformado por  $\psi$  no triângulo  $A'B'C'$  e as cevianas de  $ABC$  transformam-se nas cevianas de  $A'B'C'$  passando por  $P' = \psi(P)$ . Acontece que  $P'$  é o ponto de encontro de duas alturas de  $A'B'C'$ , quais sejam,  $A'D'$  e  $B'E'$ . Como sabemos (e.g., veja o Exemplo 20 da 2ª parte da 1ª aula do módulo “Geometria das Transformações Lineares”), a outra altura, relativa ao vértice  $C'$ , também passa por  $P'$ , ou seja,  $\psi$  transforma as cevianas dadas de  $ABC$  nas alturas de  $A'B'C'$ , como queríamos.  $\square$

**Observação 11.** *Segue da Proposição (2), do Teorema (3) e do Lema (10) que todo quadrilátero convexo é inscritível numa elipse. Pois, se  $ABCD$  é esse quadrilátero, existe um quadrilátero inscritível  $A'B'C'D'$  que se transforma em  $ABCD$  por uma equivalência afim. A imagem do círculo circunscrito a  $A'B'C'D'$  por essa equivalência afim é, então, uma elipse circunscrita a  $ABCD$ .*

**Observação 12.** *A Proposição (9) também pode ser enunciada da seguinte forma: dados um triângulo  $ABC$  e um ponto  $P$*

no interior desse triângulo, existe um triângulo  $A'B'C'$  e uma equivalência afim transformando  $ABC$  em  $A'B'C'$  e levando  $P$  no ortocentro de  $A'B'C'$ .

## 2 Aplicações

**Exemplo 13.** *Dois segmentos paralelos  $AB$  e  $CD$ , de comprimentos diferentes, são dados no plano. Utilizando apenas uma régua, construa o ponto médio de  $AB$ .*

**Solução.** A construção se baseia no seguinte argumento: as retas  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$  são concorrentes, em  $P$ , digamos. Se  $Q$  é o ponto de interseção de  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , então a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  corta  $AB$  em seu ponto médio.

Para justificar essa última afirmação, podemos supor que  $AB$  e  $CD$  têm mesmo sentido e que  $P$  e  $CD$  estão de um mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Considerando, pelo Teorema (1), uma equivalência afim  $F$  que transforme um triângulo isósceles  $A'P'B'$ , de base  $A'B'$ , em  $APB$ , basta resolver o problema para os segmentos  $A'B'$  e  $C'D'$ , sendo  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  as imagens, por  $F^{-1}$ , dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respectivamente.

Note que  $C'D'$  é paralelo a  $A'B'$ , com  $C' \in A'P'$  e  $D' \in B'P'$ . Em particular,  $\overline{P'C'} = \overline{P'D'}$ . Observe também que os segmentos  $A'D'$  e  $B'C'$  se cruzam em  $Q' = F^{-1}(Q)$ . Agora, da congruência  $A'P'D' \stackrel{LAL}{\cong} B'P'C'$ , vem  $B'\widehat{A'}Q' = B'\widehat{A'}P' - D'\widehat{A'}P' = A'\widehat{B'}P' - C'\widehat{B'}P' = A'\widehat{B'}Q'$ , ou seja,  $A'Q'B'$  é isósceles de base  $A'B'$ . Assim,  $\overleftrightarrow{P'Q'}$  é a mediatriz de  $A'B'$  e, como tal,  $\overleftrightarrow{P'Q'}$  intersecta  $A'B'$  em seu ponto médio. Como equivalências afins preservam (retas e) pontos médios, segue que a reta  $\overleftrightarrow{PQ} = F(\overleftrightarrow{P'Q'})$  corta  $AB = F(A'B')$  em seu ponto médio, como desejado.  $\square$

**Observação 14.** *A solução do exemplo anterior ilustra a utilização de equivalências afins na simplificação de configurações geométricas.*

A fim de precisar melhor esse ponto, suponha dado um subconjunto  $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, \dots\}$  do plano. Uma propriedade afim de  $\mathcal{S}$  é qualquer propriedade referente aos pontos de  $\mathcal{S}$ , ou a quaisquer outros entes geométricos definidos a partir desses pontos, que é invariante por equivalências afins. Por exemplo, colinearidade (e.g.,  $A \in \overleftrightarrow{BC}$ ), concorrência/paralelismo (e.g., as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  são concorrentes/paralelas) ou razão orientada (e.g.,  $\frac{AB}{BC} = -3$ ). Dessa forma, se quisermos provar que a configuração  $\mathcal{S}$  possui a propriedade afim  $\mathcal{P}$ , pode ser útil imaginar relações entre os elementos de  $\mathcal{S}$  que, se verificadas, tornarão a demonstração mais simples. Feito isso, precisamos nos certificar de que a adição dessas relações simplificadoras à configuração original  $\mathcal{S}$  resulta numa nova configuração  $\mathcal{S}'$  afim-equivalente a  $\mathcal{S}$ . Nesse caso, se estabelecermos que  $\mathcal{S}'$  possui a propriedade afim  $\mathcal{P}$ , seguirá que  $\mathcal{S}$  também a possui.

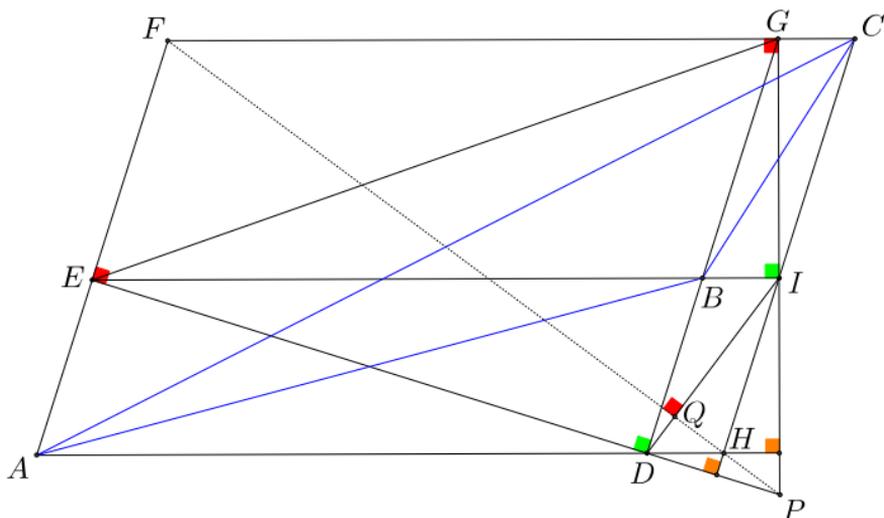
No exemplo anterior, tínhamos  $\mathcal{S} = \{A, B, C, D, M, P, Q\}$ , sendo  $M$  o ponto médio de  $AB$ , e a propriedade afim que desejávamos verificar era “ $P, Q$  e  $M$  são colineares”. Identificada a condição que simplificava o problema, a saber, “ $APB$  é isósceles de base  $AB$ ”, precisávamos encontrar um subconjunto  $\mathcal{S}' = \{A', B', C', D', M', P', Q'\}$ , afim-equivalente a  $\mathcal{S}$ , tal que  $A'P'B'$  fosse isósceles de base  $A'B'$ . Graças ao nosso primeiro teorema, garantimos a existência de  $\mathcal{S}'$  e, com argumentos geométricos simples, mostramos que  $P', Q'$  e  $M'$  eram colineares, de onde seguiu que  $P, Q$  e  $M$  também eram colineares.

Podemos resumir discussões desse tipo comentando apenas que “a menos de uma equivalência afim, podemos supor que  $\mathcal{S}$  cumpre um conjunto de relações  $R$ ”, significando que temos meios para determinar uma configuração  $\mathcal{S}'$ , onde as relações  $R$  são satisfeitas, de tal modo que  $\mathcal{S}' \approx \mathcal{S}$ .

**Exemplo 15.** Os lados de um triângulo  $ABC$  são as diagonais de três paralelogramos cujos lados têm as mesmas direções. Mostre que as outras diagonais desses paralelogramos são concorrentes.

**Solução.** Suponhamos que os lados de  $ABC$  sejam as dia-

gonais dos paralelogramos  $ADBE$ ,  $BICG$  e  $AHCF$ . Se as retas  $\overleftrightarrow{ED}$  e  $\overleftrightarrow{GI}$  se cruzam no ponto  $P$ , devemos provar que a reta  $\overleftrightarrow{FH}$  também passa por  $P$ . Veja a figura abaixo. Pelo



Lema (10) aplicado ao quadrilátero  $DEGI$ , podemos, a menos de uma equivalência afim, supor que  $E\hat{D}G = E\hat{I}G = 90^\circ$  (em particular,  $DEGI$  é inscrivível).

Com essa hipótese,  $H$  é o ortocentro do triângulo  $DIP$ , portanto,  $\overleftrightarrow{PH} \perp \overleftrightarrow{DI}$ . Como  $F\hat{E}P = F\hat{G}P = 90^\circ$ , o quadrilátero  $EFGP$  é inscrivível, logo,  $P\hat{E}G = P\hat{F}G$ . Assim, se  $Q$  é o ponto de interseção das retas  $\overleftrightarrow{PF}$  e  $\overleftrightarrow{DI}$ , temos  $Q\hat{F}G + Q\hat{I}G = D\hat{E}G + D\hat{I}G = 180^\circ$ , isto é, o quadrilátero  $FGIQ$  também é inscrivível. Daí,  $\angle IQF$  é um ângulo reto, ou seja,  $\overleftrightarrow{PF} \perp \overleftrightarrow{DI}$ . Pela unicidade da perpendicular a uma reta por um ponto dado, segue-se que  $\overleftrightarrow{PF} = \overleftrightarrow{PH}$ , isto é, as retas  $\overleftrightarrow{ED}$ ,  $\overleftrightarrow{GI}$  e  $\overleftrightarrow{FH}$  são concorrentes em  $P$ .  $\square$

**Observação 16.** Nas notações da figura acima, não é difícil provar que as retas  $\overleftrightarrow{ED}$  e  $\overleftrightarrow{GI}$  são paralelas se, e só se, o triângulo  $ABC$  se degenera (ou seja,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares). Nesse caso, as três diagonais  $\overleftrightarrow{ED}$ ,  $\overleftrightarrow{GI}$  e  $\overleftrightarrow{FH}$  são paralelas.

**Exemplo 17** (IME - 2005). Considere uma elipse de focos  $F$  e  $F'$ , e seja  $M$  um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por  $M$  duas secantes  $\overleftrightarrow{MF}$  e  $\overleftrightarrow{MF'}$ , que interceptam a elipse em  $P$  e  $P'$ , respectivamente. Demonstre que a soma  $\overline{MF}/\overline{FP} + \overline{MF'}/\overline{F'P'}$  é constante.

**Demonstração.** Pela Proposição (2) e a relação (2), basta resolver o seguinte problema similar para círculos:

Sejam  $\mathcal{C}$  um círculo e  $E$  e  $E'$  pontos interiores a  $\mathcal{C}$  que determinam um segmento de reta cujo ponto médio é  $O$ , o centro de  $\mathcal{C}$ . Dado um ponto  $L$  qualquer desse círculo, suponha que as semirretas  $\overrightarrow{LE}$  e  $\overrightarrow{LE'}$  cortem  $\mathcal{C}$  nos pontos  $N$  e  $N'$ , respectivamente. Prove que a soma  $\overline{LE}/\overline{EN} + \overline{LE'}/\overline{E'N'}$  é constante.

Seja  $R$  o raio de  $\mathcal{C}$ . Vamos considerar um sistema de coordenadas centrado em  $O$  de tal forma que  $E = (e, 0)$  e  $E' = (-e, 0)$ . Primeiro observe que, pelo teorema das cordas (vide [2]), temos  $\overline{LE} \cdot \overline{EN} = R^2 - e^2 = \overline{LE'} \cdot \overline{E'N'}$ . Logo,

$$\frac{\overline{LE}}{\overline{EN}} + \frac{\overline{LE'}}{\overline{E'N'}} = \frac{\overline{LE}^2}{\overline{LE} \cdot \overline{EN}} + \frac{\overline{LE'}^2}{\overline{LE'} \cdot \overline{E'N'}} = \frac{\overline{LE}^2 + \overline{LE'}^2}{R^2 - e^2}.$$

Para calcular  $\overline{LE}^2 + \overline{LE'}^2$  basta utilizar a fórmula da distância entre dois pontos: se  $L = (x, y)$ , temos  $x^2 + y^2 = R^2$ , de maneira que

$$\begin{aligned} \overline{LE}^2 + \overline{LE'}^2 &= [(x - e)^2 + y^2] + [(x + e)^2 + y^2] \\ &= 2(x^2 + y^2 + e^2) \\ &= 2(R^2 + e^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{LE}}{\overline{EN}} + \frac{\overline{LE'}}{\overline{E'N'}} = \frac{2(R^2 + e^2)}{R^2 - e^2},$$

uma expressão independente do ponto  $L$ , uma vez que  $R$  e  $e$  são constantes.  $\square$

A Proposição (9) tem uma importante consequência: o Teorema de Ceva.

**Teorema 18.** *Dados um triângulo  $ABC$  e cevianas internas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$ , essas cevianas são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1. \quad (3)$$

**Demonstração.** Começaremos com o caso particular em que as cevianas dadas são as alturas de  $ABC$ . Nesse caso, provaremos que  $\frac{\overline{AF}}{\overline{EA}} = \frac{b}{c}$ ,  $\frac{\overline{BD}}{\overline{FB}} = \frac{c}{a}$  e  $\frac{\overline{CE}}{\overline{DC}} = \frac{a}{b}$ , sendo  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Na verdade, como o raciocínio é o mesmo para cada uma daquelas relações, verificaremos apenas a primeira.

Ora, o quadrilátero  $BCEF$  satisfaz  $\widehat{B\hat{E}C} = \widehat{B\hat{F}C} (= 90^\circ)$  e, portanto, tal quadrilátero é inscritível. Logo,  $\widehat{B\hat{C}A} = 180^\circ - \widehat{B\hat{F}E} = \widehat{E\hat{F}A}$  e, de forma similar,  $\widehat{C\hat{B}A} = \widehat{F\hat{E}A}$ . Segue do critério AA de semelhança que  $AEF \sim ABC$ , de onde se conclui que  $\frac{\overline{AF}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{b}{c}$ , como queríamos. Assim,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{FB}} \frac{\overline{CE}}{\overline{DC}} \frac{\overline{AF}}{\overline{EA}} = \frac{c}{a} \frac{a}{b} \frac{b}{c} = 1,$$

como desejado.

Para o caso geral, suponha que as cevianas dadas de  $ABC$  sejam concorrentes. Pela Proposição (9), existe um triângulo  $A'B'C'$ , afim-equivalente a  $ABC$ , de tal modo que as alturas  $A'D'$ ,  $B'E'$  e  $C'F'$  de  $A'B'C'$  correspondem às cevianas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$ . Por (2), valem  $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{B'D'}}{\overline{D'C'}}$ ,  $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{C'E'}}{\overline{E'A'}}$  e  $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{F'B'}}$ . Do caso particular já estabelecido, temos  $\frac{\overline{B'D'}}{\overline{D'C'}} \frac{\overline{C'E'}}{\overline{E'A'}} \frac{\overline{A'F'}}{\overline{F'B'}} = 1$ , de onde segue a relação (3).

Reciprocamente, suponhamos que (3) se verifique. Se  $P$  é o ponto de interseção de  $BE$  e  $CF$ , seja  $D'$  o ponto no qual a reta  $\overleftrightarrow{AP}$  corta o lado  $BC$ . Pela primeira parte já demonstrada, vale

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1. \quad (4)$$

Comparando (3) e (4), vem  $\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ , ou seja,  $D' = D$ .

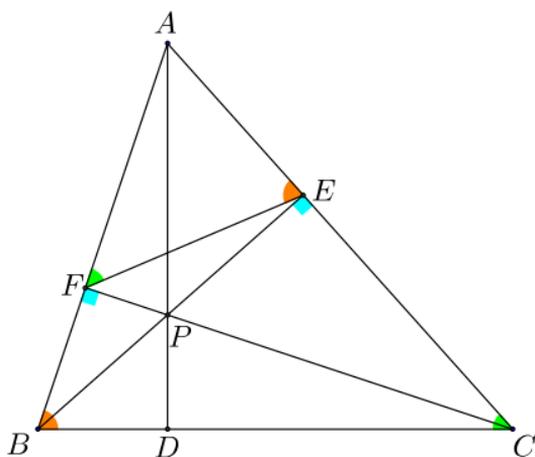


Figura 1:  $AEF \sim ABC$ .

Logo,  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  concorrem em  $P$  e a demonstração está completa. □

Para encerrar, faremos uma aplicação dos teoremas de Ceva e Menelaus (vide [2] ou a parte I da aula “Transformações Lineares do  $\mathbb{R}^2$ ” do módulo “Geometria das Transformações Lineares”). Este resultado será utilizado na 2ª parte dessa aula e se refere a uma importante noção:

**Definição 19.** *Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $P$  e  $Q$  pontos distintos e colineares. Diremos que  $P$  e  $Q$  são **conjugados harmônicos relativamente ao segmento  $AB$**  se  $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$ . Nesse caso, diz-se que  $Q$  (resp.  $P$ ) é o **conjugado harmônico de  $P$**  (resp.  $Q$ ) em relação a  $AB$ .*

Equivalentemente, se  $P$  e  $Q$  são pontos da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , um interno e o outro externo ao segmento  $AB$ , então  $P$  e  $Q$  serão conjugados harmônicos relativamente a  $AB$  se, e somente se,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}.$$

**Exemplo 20.** Dado um triângulo  $ABC$ , se  $P$  e  $Q$  são os pés das bissetrizes interna e externa relativas ao vértice  $C$ , então  $P$  e  $Q$  são conjugados harmônicos relativamente a  $AB$ . De fato, pelo teorema das bissetrizes (veja [2]), vale  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$ .

Considerando coordenadas na reta  $AB$  e sendo  $a, b, p$  e  $q$  as abscissas dos pontos  $A, B, P$  e  $Q$ , resp., a relação  $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$  se traduz em  $r = (q - a)/(q - b)$ , sendo  $r = (p - a)/(b - p)$ . Resolvendo para  $q$ , vem  $q = (rb - a)/(r - 1)$ . Como  $r = 1$  se, e só se,  $P$  é o ponto médio de  $AB$ , vemos que para qualquer ponto  $P$  na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , diferente de  $A, B$  e do ponto médio de  $AB$ , existe um único ponto  $Q$  nessa reta que é conjugado harmônico de  $P$  relativamente a  $AB$ .

É possível construir o conjugado harmônico utilizando apenas uma régua. É o que nos ensina a

**Proposição 21.** Seja  $P$  um ponto interno ao segmento de reta  $AB$ . Fixados, arbitrariamente,  $C \notin \overleftrightarrow{AB}$  e  $X \in CP$ , sejam  $Y$  e  $Z$  os pontos nos quais as semirretas  $\overrightarrow{AX}$  e  $\overrightarrow{BX}$  cortam os lados  $BC$  e  $AC$ , respectivamente. Se a reta  $\overleftrightarrow{YZ}$  cruza a

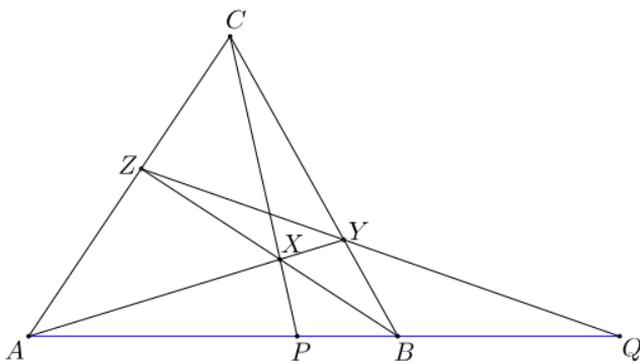


Figura 2: construção do conjugado harmônico.

reta  $\overleftrightarrow{AB}$  no ponto  $Q$ , então  $Q$  é o conjugado harmônico de  $P$  relativamente a  $AB$ .

**Demonstração.** Como  $Q$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares, o teorema de Menelaus nos dá  $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1$ . Por outro lado, a concorrência das cevianas  $AY$ ,  $BZ$  e  $CP$  implica  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1$ , pelo teorema de Ceva. Comparando as igualdades anteriores, chegamos em  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$ , ou seja,  $Q$  é o conjugado harmônico de  $P$  em relação a  $AB$ .  $\square$

**Observação 22.** *Nas notações da proposição anterior, se  $P$  não é o ponto médio de  $AB$ , então as retas  $\overleftrightarrow{YZ}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  são, de fato, concorrentes. É o que nos garante a solução do Exemplo (13).*

## Dicas para o Professor

Utilizamos, neste material, alguns resultados sobre quadriláteros inscritíveis. Sugerimos a leitura da 1ª seção do texto “*Quadriláteros Inscritos e Circunscritos*”, material teórico da 1ª aula do módulo sobre quadriláteros. Veja também a última seção do capítulo 3 de [2]. Nessa mesma referência, encontramos uma versão mais geral do Teorema de Ceva.

Cumprindo uma recomendação sugerida ao final da observação (14), não explicitamos a “dinâmica” das equivalências afins utilizadas nos Exemplos (15) e (17). O detalhamento dos argumentos poderá ser feito à luz da solução do Exemplo (13).

Em relação a ordem da exposição, o Professor pode priorizar os exemplos da 2ª seção, enunciando previamente os resultados e noções necessários em cada solução. É interessante, antes de cada resolução, oferecer algum tempo para que os alunos montem os seus esquemas de argumentação. Isso permitirá que o método via equivalências afins seja melhor apreciado. As demonstrações das proposições da 1ª seção podem ser apresentadas numa outra ocasião.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. I. M. Yaglom. *Geometric Transformations III*. AMS. 1973.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
3. E. L. Lima. *Coordenadas no Plano*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Portal OBMEP