Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 1

Paralelismo e Perpendicularidade

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Retas paralelas

Na aula sobre a equação da reta vimos que, se uma reta r não é paralela ao eixo das ordenadas, então ela admite uma equação reduzida da forma

$$y = mx + q, \tag{1}$$

onde m é o coeficiente angular e q é o coeficente linear da reta.

Lembremos que $m = \operatorname{tg}\theta$, onde θ é o ângulo que a reta r faz com a parte positiva do eixo das abscissas, medido no sentido anti-horário. Já o coeficiente linear q é a ordenada do ponto onde a reta r encontra o eixo das ordenadas (figura 1).

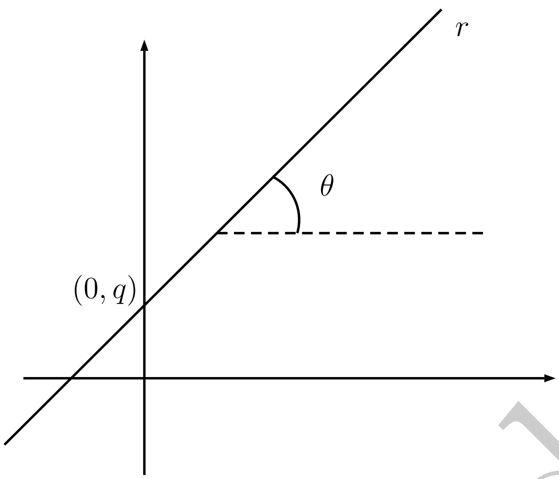

Figura 1: a reta $y = mx + q$, com $m = \operatorname{tg}\theta$.

O coeficiente angular é uma medida da direção de uma reta. Como retas paralelas têm a mesma direção, é natural esperar que elas tenham o mesmo coeficiente angular. De fato, vale o seguinte:

Duas retas são paralelas se, e somente se, têm o mesmo coeficiente angular.

Para justificar a afirmação acima, devemos primeiramente observar que retas paralelas formam um mesmo ângulo com uma reta transversal. Em particular, se r e s são retas paralelas, então elas formam o mesmo ângulo com o eixo das abscissas (figura 2). Neste caso, se m_r e m_s são os coeficientes angulares das retas r e s, respectivamente, então

$$m_r = \operatorname{tg}\theta = m_s.$$

Reciprocamente, se as retas r e s têm o mesmo coeficiente angular e formam ângulos θ_r e θ_s com a horizontal, então

$$\operatorname{tg}\theta_r = m_r = m_s = \operatorname{tg}\theta_s.$$

Por sua vez, isso implica que $\theta_r = \theta_s$, pois ambos os ângulos estão entre 0 e 180°.

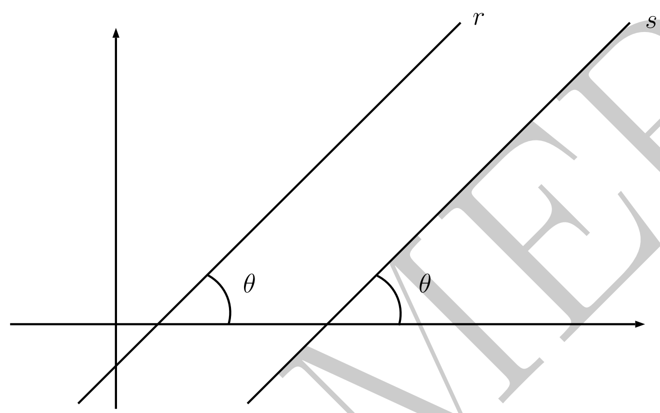

Figura 2: as retas r e s são paralelas.

Exemplo 1. *Os pontos $A(1,1), B(3,2)$ e $C(2,4)$ são os vértices de um paralelogramo. Calcule as coordenadas do quarto vértice desse paralelogramo.*

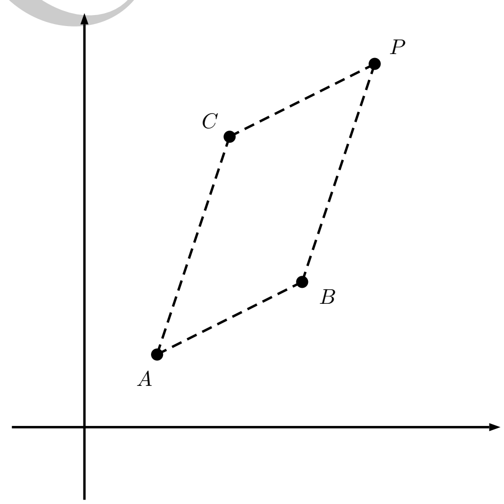

Figura 3: dados três vértices A, B e C de um paralelogramo, encontrar o quarto vértice P.

Solução. O vértice P é o ponto de interseção das retas r e s, que contêm os lados BP e CP do pararalelogramo, respectivamente.

Como $ABPC$ é um paralelogramo, a reta r é paralela à reta que passa por A e C; logo, o coeficiente angular m_r da reta r é igual ao coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AC}$, ou seja,

$$m_r = \frac{4-1}{2-1} = 3.$$

Da mesma forma, podemos calcular o coeficiente angular da reta s, pois ela é paralela à reta que passa por A e B:

$$m_s = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

A reta r passa pelo ponto B, de coordenadas $(3, 2)$, e tem coeficiente angular $m_r = 3$; logo, sua equação é $y - 2 = 3(x - 3)$. Simplificando, obtemos

$$r : y = 3x - 7.$$

Analogamente, a reta s passa pelo ponto $C = (2, 4)$ e tem coeficiente angular $m_s = \frac{1}{2}$. Assim, sua equação é $y - 4 = \frac{1}{2}(x - 2)$. Simplificando, obtemos

$$s : 2y = x + 6.$$

Para encontrar as coordenadas do ponto P, devemos resolver o sistema formado pelas equações das retas r e s. Fazendo isso, encontramos $x = 4$ e $y = 5$ como solução. Portanto, o ponto P tem coordenadas $P = (4, 5)$. □

2 Retas perpendiculares

Nesta seção encontraremos uma condição necessária e suficiente sobre os coeficientes angulares de duas retas para que elas sejam perpendiculares.

Se uma das retas é vertical, isto é, paralela ao eixo das ordenadas, o problema tem solução imediata: a outra reta é perpendicular à reta vertical se, e só se, for horizontal, ou seja, for paralela ao eixo das abscissas (e, portanto, tiver coeficiente angular igual a zero). Dessa forma, podemos supor que nenhuma das retas é vertical.

Sejam, pois, r e s duas retas não verticais, e sejam $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s x + q_s$ as suas equações reduzidas.

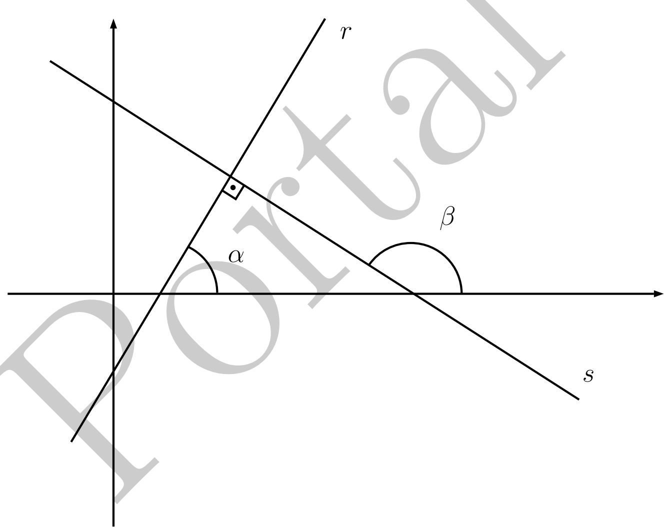

Figura 4: duas retas perpendiculares.

Sejam α e β os ângulos formados pelas retas r e s, respectivamente, com o eixo das abscissas (veja a figura 4), de modo que $m_r = \operatorname{tg}\alpha$ e $m_s = \operatorname{tg}\beta$.

O ângulo β é a medida de um ângulo externo do triângulo retângulo formado pelas retas r e s e pelo eixo das abscissas. Pelo Teorema do Ângulo Externo, sua medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes:

$$\beta = \alpha + 90^\circ.$$

Assim,

$$m_s = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ)}{\cos(\alpha + 90^\circ)}$$

Da trigonometria, sabemos que $\operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ) = \cos\alpha$ e $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{sen}\alpha$. Logo,

$$m_s = \frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{m_r}.$$

Portanto, se as retas r e s são perpendiculares, então seus coeficientes angulares satisfazem a seguinte identidade:

$$m_r \cdot m_s = -1. \qquad (2)$$

Reciprocamente, se os coeficientes angulares as retas r e s satisfazem a condição (2), então

$$\operatorname{tg}\beta = m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Mas, de acordo com a discussão acima, temos

$$-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ)}{\cos(\alpha + 90^\circ)} = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ).$$

Portanto, obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ). \qquad (3)$$

Essa relação, juntamente com o fato de que $90^\circ < \alpha + 90^\circ, \beta < 180^\circ$, implica que $\beta = \alpha + 90^\circ$.

Por fim, observe que, na análise da recíproca, obviamente não sabemos de antemão que r e s são perpendiculares (de fato, é isso que queremos estabelecer). Contudo, exceto por esse fato, a figura 4 ainda é válida, isto é, β é um ângulo externo do triângulo formado pelas retas r e s e pelo eixo das abscissas. Ademais, α é um dos ângulos internos não adjacentes a β. Portanto, aplicando novamente o Teorema do Ângulo Externo, concluímos de (3) que o outro ângulo interno não adjacente a β é, necessariamente, um ângulo reto. Então, as retas r e s são perpendiculares.

Resumimos a discussão acima enunciando o seguinte *critério de perpendicularidade entre duas retas*:

> Duas retas não verticais r e s são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1.

A seguir exibiremos uma dedução do resultado acima sem o uso de trigonometria.

Na figura 5, os triângulos OAB e OQC são semelhantes (pelo caso AA de semelhança de triângulos). Realmente, ambos tais triângulos são retângulos, e os ângulos $\angle OBA$ e $\angle OCQ$, tendo lados mutuamente perpendiculares, são congruentes (analisando as somas dos ângulos internos dos triângulos BPQ e OCQ, concluímos que as medidas de $\angle OBA$ e $\angle OCQ$ são ambas iguais a $90° - O\widehat{Q}C$).

Da semelhança entre os triângulos OAB e OQC, segue que

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{OC}{OB}. \tag{4}$$

Agora, sejam $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s x + q_s$ as equações reduzidas das retas r e s, respectivamente. Então, nas notações da figura 5, temos imediatamente que

$$OQ = q_s \text{ e } OB = -q_r. \tag{5}$$

Por outro lado, fazendo $y = 0$ em ambas tais equações, obtemos como resultados as abscissas dos pontos A e C, de forma que

$$OA = -\frac{q_r}{m_r} \text{ e } OC = -\frac{q_s}{m_s}. \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) em (4), obtemos:

$$\frac{q_s}{-q_r/m_r} = \frac{-q_s/m_s}{-q_r}.$$

Dessa igualdade segue que

$$-q_r q_s = \frac{q_r q_s}{m_r m_s}.$$

Mas, como estamos supondo $q_r \neq 0$ e $q_s \neq 0$ (i.e., estamos supondo que nem r nem s é horizontal, uma vez que nenhuma delas também é vertical), podemos cancelar o produto $q_r q_s$ para obter

$$m_r m_s = -1. \tag{7}$$

Reciprocamente, suponha que $m_r m_s = -1$. Como (5) e (6) ainda são válidas, levando em consideração (7) concluímos que a igualdade (4) também é válida.

Essa última relação, juntamente com o fato de que os ângulos $\angle AOB$ e $\angle QOC$ são ambos retos, nos permite concluir (pelo caso LAL de semelhança de triângulos) que os triângulos OAB e OQC são semelhantes.

Em particular, $\angle OAB$ e $\angle OQC$ são ângulos congruentes, o que implica que os ângulos $\angle OQC$ e $\angle OBA$ são complementares. Isso mostra que o triângulo BPQ é retângulo em P, de sorte que as retas r e s são perpendiculares.

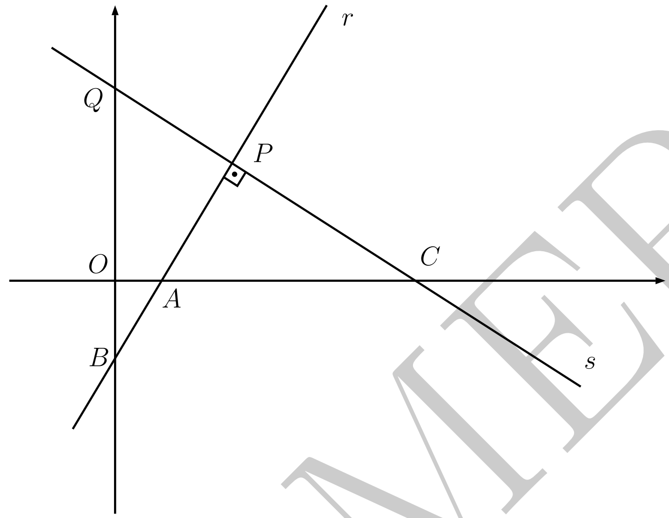

Figura 5: os triângulos OAB e OQC são semelhantes.

Uma das aplicações mais interessantes do critério de perpendicularidade de duas retas é fornecer uma demonstração bastante simples da concorrência das alturas de um triângulo. Nesse sentido, após ler o exemplo a seguir, sugerimos ao leitor compará-lo com a demonstração apresentada na Proposição 3.11 do item [2] das Sugestões de Leitura Complementar.

Exemplo 2. *Prove que as três alturas de um triângulo se encontram em um único ponto, chamado* ortocentro *do triângulo.*

Prova. Sejam A, B e C os vértices do triângulo, e escolha um sistema cartesiano de coordenadas com origem em B e tal que C esteja situado sobre o eixo das abscissas (veja a figura 6).

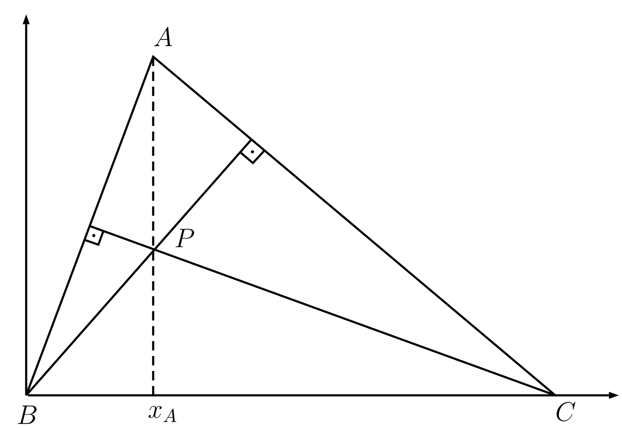

Figura 6: as três alturas de um triângulo são concorrentes.

Então, sendo (x_A, y_A), (x_B, y_B) e (x_C, y_C) as coordenadas de A, B e C, respectivamente, temos $x_B = y_B = 0$ e $y_C = 0$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que ABC não é retângulo (porque?). Em particular, as retas AB e AC não são verticais, de forma que têm coeficientes angulares respectivamente iguais a

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A}{x_A}$$

e

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\frac{y_A}{x_C - x_A}.$$

Agora, seja h_{AB} a reta suporte da altura relativa ao lado AB. Sendo perpendicular à reta AB, o critério de perpendicularidade de duas retas garante que h_{AB} tem coeficiente angular igual a

$$-\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{x_A}{y_A}.$$

Analogamente, sendo h_{AC} a reta suporte da altura relativa ao lado AC, temos que seu coeficiente angular é

$$-\frac{1}{m_{AC}} = \frac{x_C - x_A}{y_A}.$$

Como $C \in h_{AB}$ e $B \in h_{AC}$, concluímos que tais retas têm equações reduzidas

$$\begin{aligned} h_{AB} &: y - y_C = -\frac{x_A}{y_A}(x - x_C) \\ h_{AC} &: y = \frac{x_C - x_A}{y_A} x \end{aligned} \tag{8}$$

Igualando as duas expressões para y obtidas a partir das equações acima, encontramos a abscissa do ponto P de interseção das retas h_{AB} e h_{AC}:

$$\frac{x_C - x_A}{y_A} \cdot x = -\frac{x_A}{y_A}(x - x_C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_C - x_A)x = -x_A(x - x_C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_C x - x_A x = -x_A x + x_A x_C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x_A.$$

Isso significa que o ponto P de interseção das alturas relativas aos lados AB e AC tem a mesma abscissa do vértice A, isto é, esses dois pontos *pertencem à mesma reta vertical*. Por sua vez, tal reta vertical, sendo perpendicular à reta suporte do lado BC (que é o eixo horizontal), é a reta suporte da altura relativa ao lado BC. Então as três alturas passam pelo ponto P, ou seja, as três alturas são concorrentes. $\square$

Dicas para o Professor

Dois encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

A condição de paralelismo entre retas pode ser explorada com a construção de paralelogramos, como no exemplo 1, ou de outros polígonos que tenham lados opostos paralelos.

Caso você queira evitar o uso de trigonometria na dedução do critério para a perpendicularidade, pode seguir o caminho delineado no final da página 2 e começo da página 3. Este é apenas uma das maneiras de se chegar a esse resultado (outra é exibida nas vídeos aulas). De qualquer modo, é necessário utilizar semelhança de triângulos, ainda que de modo indireto.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.2. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.