Material Teórico - Módulo de PORCENTAGEM E JUROS

Juros Simples e Compostos e Exercícios

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

"Os juros compostos são a força mais poderosa do Universo."
(Albert Einstein)

1 Introdução

Na aula passada, introduzimos o conceito de juros tratando sobre a venda do violão do Josimar. Vimos que Josimar estava disposto a vender seu violão à vista por 100 reais, ou por 110 reais que poderiam ser pagos apenas no mês seguinte. Agora, imagine uma situação na qual o comprador do violão pede dois meses de prazo para pagar o valor do violão. Quanto Josimar deve cobrar nesse caso? A princípio, ele poderia escolher qualquer valor arbitrário. Por outro lado, existem dois procedimentos-padrão usuais que ele pode adotar:

i. Cobrar mais 10 reais e pedir 120 reais por uma espera de dois meses.

ii. Cobrar mais 11 reais e pedir 121 reais por uma espera de dois meses.

No primeiro caso, dizemos que Josimar está utilizando *juros simples* de 10% sobre o valor inicial. Segundo esta regra, os juros de 10% ao mês podem ser interpretados como uma *multa* pelo não pagamento do valor à vista. Portanto, a cada mês é acrescentada uma nova multa.

No segundo caso, dizemos que Josimar está utilizando *juros compostos* de 10% sobre o valor inicial. Segundo essa regra, os juros de 10% devem ser cobrados sobre o valor de 110 reais, pois é este o valor que deveria ser pago ao final do primeiro mês. Em outras palavras, interpretamos a situação como se Paulo (o comprador do violão de Josimar) fizesse um novo empréstimo de 110 reais, ao final do primeiro mês, para pagar o violão.

Nesta aula abordaremos problemas em que uma certa quantidade de dinheiro (à qual denominamos *capital*) é investida durante determinado período de tempo. Além disso, assumiremos que este capital será remunerado pelo regime de juros simples ou de juros compostos durante o período de aplicação, sendo que o regime utilizado ficará claro explicitamente ou a partir do contexto.

2 Juros Simples

No regime de juros simples, se i é a taxa de juros por unidade de tempo (que pode ser dia, mês ou ano, conforme acordado pelas partes envolvidas na negociação) e t é o número de unidades de tempo que durou a aplicação (i.e., o número de dias, meses ou anos), temos a seguinte relação entre o valor final (VF) e o valor inicial (VI):

$$VF = (1 + i \cdot t) \cdot VI. \tag{1}$$

Podemos deduzir a fórmula 1 através do seguinte raciocínio: Seja VF_1 o valor do capital após o primeiro período, VF_2 após o segundo período e assim por diante. Sabemos que

$$\begin{gathered} VF_1 = VI + i \cdot VI \\ VF_2 = VF_1 + i \cdot VI \\ VF_3 = VF_2 + i \cdot VI \\ \vdots \\ VF_t = VF_{t-1} + i \cdot VI \end{gathered}$$

Somando todas estas equações, os termos intermediários $VF_1, ..., VF_{t-1}$ desaparecem, enquanto o termo $i \cdot VI$ é somado t vezes. Ao final, chegamos à equação (1).

Exemplo 1. *Cem reais foram aplicados, por três meses, a uma taxa simples de juros, de 2% ao mês. Qual será o valor resgatado ao final da aplicação?*

Solução. Vamos dar duas soluções para este exercício. Na primeira, calculamos os valores corrigidos mês a mês:

- Ao final do primeiro mês, acrescenta-se 2 reais de juros ao valor inicial de 100 reais (uma vez que 2 reais correspodem a 2% de 100), totalizando 102 reais.
- Ao final do segundo mês, acrescenta-se mais 2 reais, totalizando 104 reais.
- Ao final do terceiro mês, acrescenta-se mais 2 reais, totalizando 106 reais.

Outra possível solução baseia-se na aplicação direta da fórmula de juros simples, descrita anteriormente. Como o valor inicial é $VI = 100$, a taxa de juros é $i = 2\% = 0,02$ e o tempo de $t = 3$ meses, temos

$$\begin{aligned} VF &= (1 + 0,02 \cdot 3) \cdot 100 \\ &= 1,06 \cdot 100 = 106. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Uma empresa de cosméticos possui R\$ 80.000,00. Ela aplica 30% desse dinheiro em um investimento que rende juros simples a uma taxa de 3% ao mês, durante dois meses; aplica o restante, também durante dois meses, em outro investimento que rende 2% de juros simples ao mês. Ao fim desse período, quanto a empresa possuirá?*

Solução. Como os juros são simples, podemos observar que, após dois meses, o primeiro investimento terá rendido um juros de 6% e o segundo terá rendido 4%.

Calculando 30% de 80.000, encontramos o valor de 24.000, que renderá 6% de juros simples após dois meses e se tornará

$$(1 + 6\%) \cdot 24000 = 25.440.$$

Calculando 70% de 80.000, encontramos o valor de 56.000 que renderá 4% de juros simples após dois meses e se tornará

$$(1 + 4\%) \cdot 56000 = 58.240.$$

Somando-se os valores encontrados concluímos que, terminados os dois meses de aplicação, a empresa possuirá

$$25.440 + 58.240 = 83.680.$$

□

Voltemos a analisar a situação inicial, i.e., a venda do violão. Desta vez suponha que, ao invés de atrasar o pagamento da dívida por mais um mês, Paulo conseguiu pagar dez dias antes. Do ponto de vista financeiro, será que é justo cobrar dele o valor de 110 reais, que corresponderia ao prazo de um mês inteiro?

De fato, o mais justo seria cobrar um valor *proporcional* ao tempo decorrido do dia da compra até o dia do pagamento. Para achar esta taxa justa (x), basta fazer uma regra de três simples, observando que o mês inteiro corresponde a 30 dias, mas que Paulo pagou após $30 - 10 = 20$ dias:

$$\frac{0,10}{x} = \frac{30}{20} \Rightarrow x \simeq 0,0667.$$

Dessa forma, em vez de pagar 110 reais após 30 dias, o mais justo seria Paulo pagar 106,67 reais após 20 dias (mas, é claro, no mundo real o credor de Paulo poderia não aceitar conceder esse desconto de antecipação, cobrando os mesmos 110 reais).

Nesse ponto de nossa discussão, vale a pena colocarmos as duas observações importantes a seguir:

1. Para utilizar a fórmula da taxa de juros simples, devemos utilizar as taxas em sua forma decimal, i.e. sem porcentagens (%).

2. A medida de tempo t e da taxa de juros i devem ser correspondentes. Por exemplo, se o tempo for calculado em anos, a taxa também deve ser anual.

Em geral, usamos abreviaturas para representar as diferentes periodicidade de taxas de juros (veja a Tabela 1).

Tabela 1: Taxa de Juros

Abreviatura	Significado
a.d.	ao dia
a.m.	ao mês
a.b.	ao bimestre
a.t.	ao trimestre
a.s.	ao semestre
a.a.	ao ano

Além disso, como a quantidade de dias nos diferentes meses não é constante, convencionou-se que, ao resolver exercícios sobre Matemática Financeira, devemos considerar o mês como tendo trinta dias e o ano como tendo 360 dias, exceto quando for mencionado algum valor diferente.

Terminemos esta seção analisando mais um exemplo.

Exemplo 3. *Para reformar seu carro, um taxista realizou um empréstimo a uma taxa de juros simples de 2,64% a.m. Se a duração do empréstimo foi de 220 dias, qual o valor pago em juros para um empréstimo de R\$ 7.000,00?*

Solução. Primeiramente, observe que a taxa de juros citada neste exemplo vem dada "ao mês" ao passo que a duração do empréstimo vem dada em dias. Então, devemos começar encontrando a taxa diária equivalente à taxa de 2,64% a.m. Para tanto, efetuamos a seguinte proporção, na qual i_d representa a taxa de juros ao dia:

$$\frac{0,0264}{i_d} = \frac{30}{1} \Rightarrow i_d = 0,00088.$$

Agora, utilizamos a fórmula de juros simples:

$$VF = (1 + i \cdot t) \cdot VI,$$

com $VI = 7000$, $t = 220$ e $i = 0,00088$, obtendo

$$\begin{aligned} VF &= (1 + 0,00088 \cdot 220) \cdot 7000 \\ &= (1 + 0,176) \cdot 7000 = 8232. \end{aligned}$$

Portanto, o taxista pagará, ao final dos 220 dias, 8232 reais pelo empréstimo de 7000 reais. □

3 Juros Compostos

No regime de juros compostos, se i é a taxa de juros por unidade de tempo (dia, mês, ano) e t é o número de unidades de tempo que durou a aplicação, temos a seguinte relação entre o valor final (VF) e o valor inicial (VI):

$$\boxed{VF = (1 + i)^t \cdot VI.} \tag{2}$$

Podemos deduzir a fórmula 2 através do seguinte raciocínio: Seja VF_1 o valor do capital após o primeiro período, VF_2 o valor após o segundo período e assim por diante. Sabemos que

$$VF_1 = VI + i \cdot VI = (1 + i)VI$$

$$VF_2 = VF_1 + i \cdot VF_1 = (1 + i)VF_1$$

$$VF_3 = VF_2 + i \cdot VF_2 = (1 + i)VF_2$$

$$\vdots$$

$$VF_t = VF_{t-1} + i \cdot VF_{t-1} = (1+i)VF_{t-1}$$

Multiplicando todas estas equações, obtemos

$$VF_1 \cdot \ldots \cdot VF_{t-1} \cdot VF_t = (1+i)^t VF \cdot VF_1 \cdot \ldots \cdot VF_{t-1}.$$

Cancelando o produto $VF_1 \cdot \ldots \cdot VF_{t-1}$, obtemos a fórmula em (2).

> **Atenção!**
>
> Comparando as demonstrações das fórmulas de juros simples e de juros compostos, podemos observar que, na primeira, os juros são sempre calculados sobre o valor inicial (VI), enquanto que, na segunda, os juros são calculados sobre o valor do capital no período imediatamente anterior. Na linguagem popular, dizemos que há "juros sobre juros". Conforme veremos no exemplo 6, isso faz com que o crescimento do capital seja muito mais rápido com juros compostos do que com juros simples.

Exemplo 4. *João tomou um empréstimo de* R\$ 900,00 *a juros compostos de* 10% *ao mês. Dois meses depois, João pagou* R\$ 600,00 *e, um mês após esse pagamento, liquidou o empréstimo. Qual foi o valor desse último pagamento?*

Solução. Após o primeiro mês, a dívida será de $900 + 10\% \cdot 900 = 990$ reais. Ao final do segundo mês, será de $990 + 10\% \cdot 990 = 1089$ reais. Como João pagou 600 reais nesse momento, seu *saldo devedor* ficou em $1089 - 600 = 489$ reais. Aplicando novamente juros de 10% para o terceiro mês, concluímos que a dívida paga ao final do último mês foi de $489 + 10\% \cdot 489 = 537,90$ reais. □

Exemplo 5. *Uma aplicação especial rende* 15% *ao mês, em regime de juros compostos. Se uma pessoa aplica a quantia de* R\$ 620,00 *durante três meses, calcule o montante gerado pela aplicação.*

Solução. Utilizando a fórmula (2), obtemos

$$VF = (1+0,15)^3 \cdot 620 = (1,15)^3 \cdot 620 = 942,94.$$

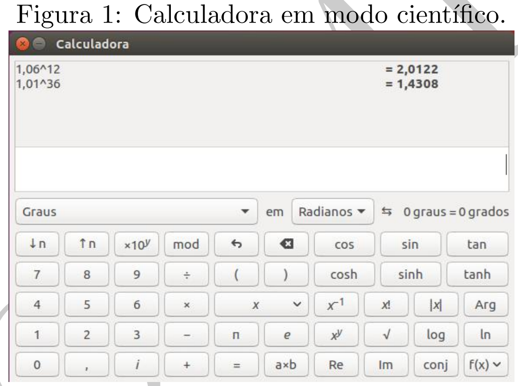
□

4 Usando a calculadora

Em relação aos problemas de juros simples, os exercícios de juros compostos possuem contas mais complicadas de resolver manualmente, pois envolvem operações de potenciaçõ ao invés de operações de multiplicação. Quando a quantidade de períodos é pequena ($t = 2$ ou $t = 3$), os cálculos não se tornam demasio cansativos; porém, quando a quantidade de períodos é grande ($t = 6, 7, \ldots$), é recomendável o uso de uma calculadora. Nesta seção, lhe ensinaremos como utilizar a calculadora científica do computador ou celular (ou uma calculadora de bolso científica) para efetuar operações de potenciação com expoentes altos.

Após abrir o aplicativo *calculadora*, deve-se mudar o modo de *simples* para *avançado* (ou *científico*). Ao fazer isso, você verá uma janela semelhante à mostrada na Figura 1:

Figura 1: Calculadora em modo científico.



Observe o botão $\boxed{x^y}$, que permite o cálculo de potências. Por exemplo, se quisermos calcular o valor de $(1,06)^{12}$, digitamos

$$\boxed{1{,}06}\ \boxed{x^y}\ \boxed{12}\ \boxed{=}$$

Para outro exemplo, se quisermos calcular o valor de $(1,01)^{36}$, digitamos

$$\boxed{1{,}01}\ \boxed{x^y}\ \boxed{36}\ \boxed{=}$$

Conforme prometido anteriormente, o próximo exemplo utiliza a calculadora para ilustrar o "poder" dos juros compostos.

Exemplo 6. *Considere dois tipos de investimento: o primeiro paga uma taxa de juros simples de* 5% *a.m. e o segundo uma taxa de juros compostos de* 2% *a.m. Ao fazermos dois depósitos de* 1000 *reais, um em cada um desses tipos de investimento, qual apresentará um maior retorno após um período de dez anos?*

Solução. Veja que em dez anos existem 120 meses. Usando a fórmula de juros simples, temos:

$$VF_{120} = (1 + 120 \cdot 0,05) \cdot 1000 = 7000.$$

Agora, usando a fórmula dos juros compostos e uma calculadora, obtemos

$$VF_{120} = (1 + 0,02)^{120} \cdot 1000 = 10765,16.$$

Assim, mesmo a uma taxa bem menor, o investimento sobre uma taxa de juros composta torna-se muito mais vantajoso em períodos suficientemente longos de tempo. □

Quando estamos trabalhando com juros compostos, a forma correta para achar taxas equivalentes entre diferentes períodos de tempo não é mais através da regra proporcional. Neste caso, devemos utilizar a *regra do expoente*. Por exemplo, considere uma taxa de juros compostos 1% ao mês. Qual é a taxa equivalente para um período de um ano? Para acharmos este valor, resolvemos a equação

$$(1 + i_m)^{12} = 1 + i_a,$$

em que i_m representa a taxa de juros ao mês (que, nessa situação, é igual a $0,01$) e i_a é a taxa de juros ao ano. Usando a calculadora, percebemos que

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + 0,01)^{12} = (1,01)^{12} = 1,126.$$

Portanto,

$$1 + i_a = 1,126 \Rightarrow i_a = 0,126,$$

de forma que juros compostos de 1% a.m. correspodem a uma taxa de $12,6\%$ a.a. Note que este valor que é maior do que a taxa equivalente no caso de juros simples, que seria de 12% a.a.

Exemplo 7. *Isabel tem duas opções de investimento:*

(a) Um título de longo prazo que paga juros de 7% a.a. e que tem vencimento em 10 anos.

(b) Um título de médio prazo que paga juros de $7,5\%$ a.a. e que tem vencimento em 5 anos.

Independentemente da escolha, o Governo Federal estabelece o pagamento de Imposto de Renda sobre o ganho de capital de 15% no vencimento de cada título.

Isabel deseja investir certa quantia em dinheiro para a aponsentadoria e tomou a decisão de investir no título de médio prazo por cinco anos e, depois de receber o principal e os juros no vencimento, reinvestir o total líquido (i.e., após o recolhimento dos Imposto de Renda) no mesmo título por mais cinco anos. Ela tomou a melhor decisão do ponto de vista financeiro?

Solução. Calculemos os valores finais líquidos (i.e., livres de impostos) de cada uma das aplicações mencionadas. Suponha ainda (por simplicidade) que Isabel tenha uma quantia de 1000 reais para investir.

Na primeira opção, após dez anos Isabel terá acumulado um total bruto (i.e., antes de descontar os impostos) de

$$VF_{10} = (1 + 0,07)^{10} \cdot 1000 = (1,07)^{10} \cdot 1000 = 1967,15$$

reais. Portanto, ela terá um ganho de capital de $967,15$, e sobre este valor incidirá um imposto de 15%, o que equivale a $145,07$ reais. Logo, em termos líquidos, esse investimento retornará a Isabel uma quantia de $1967,15 - 145,07 = 1822,08$ reais.

Na segunda opção, após cinco anos Isabel terá acumulado um total bruto de

$$VF_5 = (1 + 0,075)^5 \cdot 1000 = (1,075)^5 \cdot 1000 = 1435,62$$

reais. Portanto, ela terá um ganho de capital de $435,62$, sobre o qual incidirá um imposto de 15%, o que equivale a $65,34$ reais. Logo, em termos líquidos, este investimento retornará a Isabel uma quantia de $1435,62 - 65,34 = 1370,28$ reais após os cinco primeiro anos. Investindo esse dinheiro novamente por mais cinco anos, Isabel acumulará um total bruto de

$$VF_{10} = (1,075)^5 \cdot 1370,62 = 1967,70$$

reais. Portanto, no segundo período de 5 anos ela terá um ganho de capital de $1967,70 - 1370,62 = 597,08$; sobre este valor incidirá novamente a alíquota de 15% de Imposto de Renda, o que equivale a $89,56$ reais. Logo, em termos líquidos, este reinvestimento resultará em uma quantia de $1967,70 - 89,56 = 1878,14$ reais.

Portanto, podemos verificar que Isabel tomou a decisão correta do ponto de vista financeiro. $\square$

5 Sugestões ao professor

Solicite que os alunos comentem situações reais nas quais eles (ou seus pais) se depararam com uma aplicação dos assuntos abordados nesta aula. Deixe claro aos alunos que praticamente não existem situações reais em que os juros são calculados através do regime simples, e que tal modalidade de cobrança de juros é ensinada quase somente por questões didáticas.

Separe três encontros de 50 minutos cada para discutir os conteúdos apresentados nesta aula. No primeiro, dedique-se à introdução e ao regime de juros simples. No segundo, trate sobre o regime de juros compostos, destacando sua importância em exemplos reais. Por fim, use o terceire encontro para ensinar os alunos a utilizarem a calculadora para resolver problemas de juros compostos com períodos longos.

Créditos pelas figuras:
`www.freepik.com`