

Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Semelhança entre triângulos - Parte III

Nono ano do Ensino Fundamental

**Autor: Prof. Antonio Caminha M.
Neto**

4 de Agosto de 2026



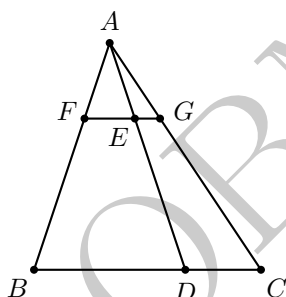
**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Colecionamos, aqui, mais algumas aplicações de semelhanças de triângulos.

Exemplo 1. Em um triângulo ABC , escolhemos um ponto D sobre BC e pontos F e G , respectivamente sobre AB e AC , tais que $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Se AD intersectar FG em E , prove que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EG}}.$$

Prova. A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado.



Pelo paralelismo de $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, temos $\widehat{AFE} = \widehat{ABD}$ e $\widehat{AGE} = \widehat{ACD}$. Como $\widehat{FAE} = \widehat{BAD}$ e $\widehat{GAE} = \widehat{CAD}$, segue que $AFE \sim ABD$ e $AGE \sim ACD$. Então,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GE}},$$

que é precisamente a relação do enunciado. $\square$

O exemplo a seguir foi retirado da referência [1].

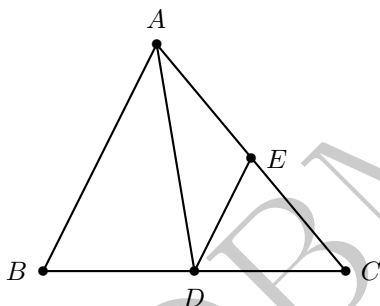
Exemplo 2 (Olimpíada Cearense). Seja ABC um triângulo. Considere o ponto $D \in BC$ tal que $\overline{BD} = 2\overline{DC}$. Mostre que

$$3\overline{AD} < \overline{AB} + 2\overline{AC}.$$

Prova. Seja $E \in AC$ tal que $\overline{AE} = 2\overline{EC}$. Temos

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = 3 = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}};$$

portanto, a recíproca do Teorema de Tales implica que $AB \parallel ED$ e que os triângulos ABC e EDC são semelhantes. Em particular, $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.



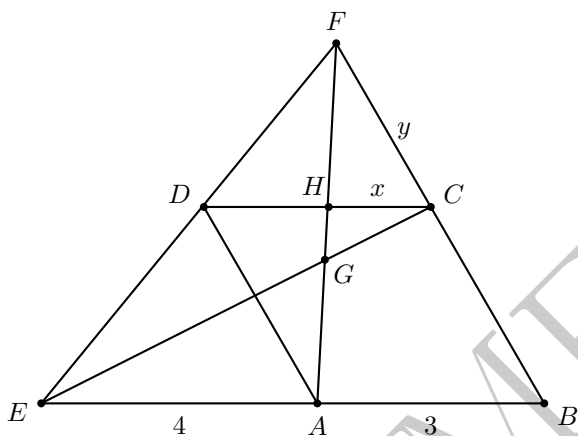
Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo ADE com respeito ao lado AD e substituindo os valores encontrados acima, obtemos que

$$\overline{AD} < \overline{DE} + \overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}.$$

Multiplicando essa desigualdade por 3, concluímos que $3\overline{AD} < \overline{AB} + 2\overline{AC}$. $\square$

Exemplo 3. Seja $ABCD$ um losango tal que $\overline{AB} = 3$ e $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Traçamos uma reta por D que intersecta as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ em E e F , respectivamente (e não intersecta o losango em nenhum outro ponto além de D), com $\overline{AE} = 4$. Se AF e CE intersectam-se em G , calcule a razão $\frac{\overline{CG}}{\overline{EG}}$.

Solução. Como os lados de um losango têm um mesmo comprimento, ABC e ACD são triângulos equiláteros. (Acompanhe na figura a seguir, na qual também marcamos o ponto H de interseção de AF e CD .)



Como $\widehat{AEG} = \widehat{HCG}$ (ângulos alternos internos) e $\widehat{AGE} = \widehat{HGC}$ (ângulos OPV), temos $\triangle AEG \sim \triangle HCG$, logo,

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{EA}}. \quad (1)$$

Denotemos (como mostrado na figura) $\overline{CH} = x$ e $\overline{CF} = y$. Como $\triangle CDF \sim \triangle BEF$ (pois $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BE}$), segue que

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} \quad \therefore \quad \frac{y}{3} = \frac{y+3}{7} \quad \therefore \quad y = \frac{9}{4}.$$

Como $\triangle CHF \sim \triangle BAF$ (pois $\overleftrightarrow{CH} \parallel \overleftrightarrow{BA}$), segue que

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BF}} \quad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{3+y}$$

$$\frac{x}{9/4} = \frac{3}{3+9/4} \quad \therefore \quad x = \frac{9}{7}.$$

Por fim, voltando a (1), temos

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{EG}} = \frac{x}{4} = \frac{9}{28}.$$

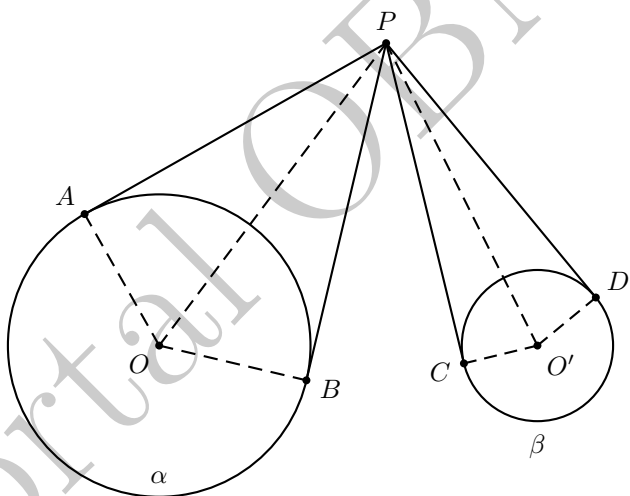
□

Para o exemplo a seguir, dados um círculo α e um ponto P exterior a α , definimos o *ângulo segundo o qual P vê α* como o ângulo formado pelas tangentes traçadas a α a partir de P (o ângulo $\angle APB$, na figura a seguir).

Exemplo 4. *Sejam α e β dois círculos exteriores, de centros O e O' e raios R e r , respectivamente. Mostre que um ponto P do plano vê α e β segundo ângulos iguais se, e só se,*

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PO'}} = \frac{R}{r}.$$

Prova. Sejam A e B os pés das tangentes traçadas de P a α e C e D os pés das tangentes traçadas de P a β (veja a figura a seguir — na qual P não necessariamente vê α e β segundo um mesmo ângulo).



Como $\widehat{APB} = 2\widehat{APO}$ e $\widehat{CPD} = 2\widehat{CPO'}$, temos que

$$\widehat{APB} = \widehat{CPD} \Leftrightarrow \widehat{APO} = \widehat{CPO'}.$$

Por outro lado, como

$$\widehat{OAP} = \widehat{O'CP} = 90^\circ,$$

segue que $\widehat{APO} = \widehat{CPO'}$ se, e só se, os triângulos APO e CPO' tiverem dois pares de ângulos iguais, isto é, se, e só se,

$$APO \sim CPO'.$$

Escrevendo a semelhança entre tais triângulos, temos

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PO'}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AO'}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{PO}}{\overline{PO'}} = \frac{R}{r}.$$

Assim, P vê α e β segundo ângulos iguais se, e só se, $APO \sim CPO'$, o que por sua vez ocorre se, e só se,

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PO'}} = \frac{R}{r}.$$

□

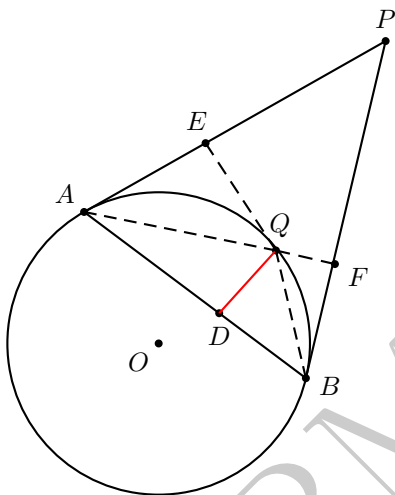
Observação 5. *Recorde que dois círculos exteriores têm exatamente quatro tangentes comuns; dessas, as duas que deixam os centros dos círculos em um mesmo semiplano são as **tangentes comuns externas**, enquanto as duas que deixam os centros dos círculos em semiplanos opostos são as **tangentes comuns internas**.*

Nas notações do enunciado do exemplo anterior, suponha que $R \neq r$ e sejam X e Y os pontos de encontro das tangentes comuns externas e das tangentes comuns internas a α e β , respectivamente. É possível mostrar (veja o capítulo 4 de [1]) que o conjunto dos pontos P que vêem α e β segundo ângulos iguais coincide com o círculo de diâmetro XY .

Exemplo 6. *A partir de um ponto P , exterior a um círculo, traçamos as tangentes PA e PB ao mesmo. Em seguida, escolhemos um ponto Q sobre o arco menor $\widehat{AB}$ e marcamos os pontos D , E e F , pés das perpendiculares baixadas de Q a AB , AP e BP , respectivamente. Mostre que*

$$\overline{EQ} \cdot \overline{FQ} = \overline{DQ}^2.$$

Prova. A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado.



Inicialmente, note que

$$Q\hat{A}D = Q\hat{A}B = \frac{1}{2} \widehat{BQ} = F\hat{B}Q$$

e

$$Q\hat{B}D = Q\hat{B}A = \frac{1}{2} \hat{A}Q = E\hat{A}Q.$$

Portanto,

$$ADQ \sim BFQ \quad \text{e} \quad BDQ \sim AEQ.$$

Escrevendo as semelhanças em questão, obtemos

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{FQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{EQ}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}},$$

de maneira que

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{FQ}} = \frac{\overline{EQ}}{\overline{DQ}}.$$

Multiplicando em $\times$, obtemos a relação pedida no enunciado.

☐

Dicas para o Professor

Enfatizamos uma vez mais que, ao aplicar o conceito de semelhança de triângulos a uma certa situação, o mais complicado, em geral, é enxergar a semelhança. Nesse sentido, os exemplos discutidos nessa terceira parte têm um grau de dificuldade maior que aqueles da parte anterior.

Também conforme já comentamos, a chave para exercitar essa visão de semelhanças é resolver diversos problemas, de graus de dificuldade variados. Uma vez mais, a recomendação da referência [2] para problemas mais complexos e [3] para problemas mais simples permanece.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha et al. *Olimpíadas Cearenses de Matemática*, 2014 a 2024. Rio de Janeiro, Editora da S.B.M., 2025.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 3ª edição. Rio de Janeiro, Editora da S.B.M., 2024.
3. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2013.