Material Teórico - Módulo Cardinalidade de Conjuntos

Conjuntos Enumeráveis – Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Antonio Caminha M. Neto

10 de Agosto de 2024

Portal da Matemática
OBMEP

Nesta aula, continuamos a estudar conjuntos enumeráveis. Nosso objetivo, aqui, é mostrar que algumas operações elementares sobre conjuntos enumeráveis fornecem, como resultado, conjuntos que continuam enumeráveis.

Em particular, concluiremos mostrando que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é enumerável e apresentaremos uma estratégia para enumerar $\mathbb{Q}$.

Proposição 1. *Todo subconjunto não vazio de um conjunto enumerável é enumerável.*

Prova. Sejam A um conjunto enumerável e $B \subset A$ não vazio.

Se B for finito, nada há a fazer. Se B for infinito, então A também o é, e podemos tomar uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$. Sendo

$$B' = \{f(x); x \in B\},$$

temos que B' é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$; portanto, pela Proposição 8 da Parte I, B' é enumerável. Dessa forma, podemos tomar uma bijeção $g : B' \to \mathbb{N}$.

Para concluir, defina uma função $h : B \to \mathbb{N}$ pondo

$$h(x) = g(f(x)), \ \forall\, x \in B.$$

A imagem de h é

$$\mathrm{Im}(h) = \{g(f(x)); x \in B\} = \{g(b'); b' \in B'\} = \mathrm{Im}(g) = \mathbb{N};$$

então, h é sobrejetiva.

Por outro lado, para $x, y \in B$, as injetividades de f e g garantem que

$$h(x) = h(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y;$$

então, h é injetiva.

Dessa forma, h é uma bijeção de B em $\mathbb{N}$, garantindo que B é enumerável. $\square$

Uma consequência útil da proposição anterior é a seguinte.

Corolário 2. *Se $f : A \to B$ for injetiva e B for enumerável, então A é enumerável.*

Prova. Se A for finito, nada há a fazer. Se A for infinito e $f : A \to B$ for injetiva, seja $A' = \mathrm{Im}(f)$.

Como f induz uma bijeção de A em A', temos que A' é infinito. Por outro lado, como A' é subconjunto do conjunto enumerável B, a proposição anterior garante que A' é enumerável. Então, existe uma bijeção $g : A' \to \mathbb{N}$.

Defina, agora, $h : A \to \mathbb{N}$ pondo, para $x \in A$,

$$h(x) = g(f(x)).$$

Então, as injetividades de f e de g garantem a injetividade de h. Por outro lado, como $\mathrm{Im}(f) = A'$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{N}$, é imediato que $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{N}$, isto é, h é sobrejetiva.

Então, h é uma bijeção de A em $\mathbb{N}$, de forma que A é enumerável. $\square$

Para o resultado a seguir, recorde que, dados conjuntos X e Y, a *diferença* $X \setminus Y$ (denotada, por vezes, $X - Y$, é o conjunto formado pelos elementos de X que não pertencem a Y:

$$X \setminus Y = \{x \in X;\, x \notin Y\}.$$

Também, dois conjuntos X e Y são *disjuntos* se não tiverem elementos comuns, isto é, se $X \cap Y = \emptyset$.

Teorema 3. *Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ também é enumerável.*

Prova. Pela proposição 1, o conjunto $B \setminus A$, se não for vazio, também é enumerável. Ademais,

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A),$$

com A e $B \setminus A$ disjuntos.

Portanto, para mostrar que $A \cup B$ é enumerável podemos supor, de início que A e B são disjuntos. Consideremos três casos separadamente:

i. A e B são finitos: nesse caso, $A \cup B$ também é finito, e nada mais há a fazer.

ii. A é finito e B é infinito: seja $|A| = n$ e tome uma bijeção $f : A \to I_n$. Pela enumerabilidade e infinitude de B, também podemos tomar uma bijeção $g : B \to \mathbb{N}$.

Para construir uma bijeção de $A \cup B$ em $\mathbb{N}$, começamos *transladando* a imagem de B por g de n elementos, para *abrir espaço* para a imagem de A por f. Fazemos isso definindo a função $g_1 : B \to \mathbb{N}$ por

$$g_1(x) = g(x) + n, \ \forall \ x \in B.$$

Como g é injetiva, g_1 é também injetiva; como g é sobrejetiva, temos

$$\mathrm{Im}(g_1) = \{g(x) + n; \, x \in B\} = \{n + 1, n + 2, n + 3, \ldots\}.$$

Agora, defina $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ pondo

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g_1(x), & \text{se } x \in B \end{cases}.$$

Não é difícil verificar que h é bijetiva.

iii. A e B são infinitos: sabemos que existem bijeções $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$.

Para mesclar f e g numa bijeção de $A \cup B$ em $\mathbb{N}$, começamos definindo $f_1 : A \to \mathbb{N}$ e $g_1 : B \to \mathbb{N}$ por

$$f_1(x) = 2f(x) \quad \text{e} \quad g_1(y) = 2g(y) - 1,$$

para todos $x \in A$, $y \in B$. Então, f_1 e g_1 são injetivas e, como $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = \mathbb{N}$, temos

$$\mathrm{Im}(f_1) = \{2, 4, 6, \ldots\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(g_1) = \{1, 3, 5, \ldots\}.$$

(Os conjuntos dos naturais pares e ímpares, respectivamente.)

Podemos, então, definir $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ pondo

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x \in A \\ g_1(x), & \text{se } x \in B \end{cases}.$$

A injetividade de f_1 e g_1, juntamente com o fato de que $\mathrm{Im}(f_1) \cap \mathrm{Im}(g_1) = \emptyset$, garante que h é injetiva. Por outro lado, o fato de que $\mathrm{Im}(f_1) \cup \mathrm{Im}(g_1) = \mathbb{N}$ garante que h é sobrejetiva. $\square$

Corolário 4. *Se A_1, A_2, ..., A_n são conjuntos enumeráveis, então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ também é enumerável.*

Prova. Se $n = 2$, nada há a fazer. Se $n > 2$, aplicando $n - 1$ vezes o teorema anterior, concluímos sucessivamente que $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ..., $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ são enumeráveis. $\square$

O teorema a seguir generaliza amplamente o resultado anterior. De fato, a fim de obter o resultado anterior, poderíamos ter somente demonstrado o teorema 6 e, em seguida, observar que uma adaptação óbvia de sua prova implica a demonstração do corolário anterior.

Antes de enunciar a generalização desejada, precisamos de uma discussão preliminar, interessante em si mesma.

Lema 5. *Sejam dados conjuntos não vazios A_1, A_2, A_3, ... Existem conjuntos A_1', A_2', A_3', ..., dois a dois disjuntos, tais que $A_i' \subset A_i$ para todo $i \geq 1$ e*

$$A_1' \cup A_2' \cup A_3' \cup \ldots = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots.$$

Prova. Definamos

$$\begin{aligned}
A_1' &= A_1 \\
A_2' &= A_2 \setminus A_1 \\
A_3' &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\
A_4' &= A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&\ldots.
\end{aligned}$$

Temos $A_i' \subset A_i$ para todo $i \geq 1$, $A_i' \cap A_j' = \emptyset$ sempre que $i \neq j$ e

$$A_1' \cup A_2' \cup A_3' \cup \ldots = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

$\square$

Nas notações do lema anterior, seja

$$I = \{i \in \mathbb{N};\ A'_i \neq \emptyset\}.$$

Como $I \subset \mathbb{N}$, temos I enumerável, de modo que (i) existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to I$ (se I for infinito) ou (ii) existe uma bijeção $\varphi : I_n \to I$ para algum $n \in \mathbb{N}$ (se I for finito com n elementos).

No caso (i), defina $A''_i = A'_{\varphi(i)}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, A''_i é um subconjunto não vazio de $A_{\varphi(i)}$, logo, é enumerável; também, $A''_i \cap A''_j = \emptyset$ sempre que $i, j \geq 1$ forem distintos e

$$\begin{aligned} A''_1 \cup A''_2 \cup A''_3 \cup \ldots &= A'_{\varphi(1)} \cup A'_{\varphi(2)} \cup A'_{\varphi(3)} \cup \ldots \\ &= A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \cup \ldots \\ &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots . \end{aligned}$$

No caso (ii), defina $A''_i = A'_{\varphi(i)}$ para todo $i \in I_n$. Da mesma forma que em (i), A''_i é um subconjunto não vazio de $A_{\varphi(i)}$, logo, é enumerável; também, $A''_i \cap A''_j = \emptyset$ sempre que $i, j \geq 1$ forem distintos e

$$\begin{aligned} A''_1 \cup A''_2 \cup \ldots \cup A''_n &= A'_{\varphi(1)} \cup A'_{\varphi(2)} \cup \ldots \cup A'_{\varphi(n)} \\ &= A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n \\ &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \end{aligned}$$

Teorema 6. *Uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Mais precisamente, se, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto A_n é enumerável, então o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ também é enumerável.*

Prova. A discussão que precede o teorema nos permite dividir a demonstração em dois casos:

(i) Existem conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos A''_1, A''_2, A''_3, $\ldots$ tais que

$$A''_1 \cup A''_2 \cup A''_3 \cup \ldots = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots .$$

(ii) Existem conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos A_1'', A_2'', ..., A_n'' tais que

$$A_1'' \cup A_2'' \cup \ldots \cup A_n'' = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots.$$

Analisemos, inicialmente, o caso (i). Para considerar de uma vez só os casos em que cada A_i'' é finito ou infinito, observe que, independentemente de qual dessas possibilidades ocorrer, existe uma função injetiva $f_i : A_i'' \to \mathbb{N}$ (que pode ser tomada bijetiva se A_i'' for infinito; no entanto, isso será irrelevante para nosso argumento).

Seja $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ o conjunto (infinito dos números primos e

$$A = A_1'' \cup A_2'' \cup A_3'' \cup \ldots = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots.$$

Defina

$$f : A \to \mathbb{N}$$

pondo, para $x \in A$,

$$f(x) = p_i^{f_i(x)}, \text{ se } x \in A_i'', \text{ para } i \geq 1.$$

Como os conjuntos A_1'', A_2'', A_3'', ...são dois a dois disjuntos, dado $x \in A$ existe um único $i \geq 1$ tal que $x \in A_i''$. Então, $f(x)$ está bem definido.

Sejam $x, y \in A$, com $x \in A_i''$ e $y \in A_j''$. Se $f(x) = f(y)$, então

$$p_i^{f_i(x)} = p_j^{f_j(y)}.$$

Se $i \neq j$, então $p_i \neq p_j$, de modo que essa igualdade é impossível (uma potência de p_i não pode ser igual a uma potência de p_j se $p_i \neq p_j$). Portanto, $i = j$ e, daí, a igualdade acima dá $f_i(x) = f_i(y)$. Como f_i é injetiva, segue que $x = y$. Assim, a implicação

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

sempre é verdadeira, o que garante a injetividade de f.

Como $f : A \to \mathbb{N}$ é injetiva, o Corolário 2 garante que A é enumerável.

Para o caso (ii), a única diferença é que começamos definindo $f : A \to \mathbb{N}$ pondo, para $x \in A$,

$$f(x) = p_i^{f_i(x)}, \text{ se } x \in A_i'', \text{ para } 1 \le i \le n.$$

□

Nosso próximo passo é mostrar que o *produto cartesiano* de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. Para tanto, comecemos recordando os conceitos relevantes.

Definição 7. *Dados conjuntos não vazios A e B, o **produto cartesiano** de A e B (nessa ordem), denotado $A \times B$, é o conjunto dos pares ordenados (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$:*

$$A \times B = \{(a, b);\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Recorde que a *propriedade fundamental dos pares ordenados* é a seguinte: para $a, c \in A$ e $b, d \in B$,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Valendo-nos novamente de números primos, provaremos agora o seguinte resultado importante.

Teorema 8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Prova. Definamos a função

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

pondo

$$f(a, b) = 2^a 3^b, \text{ para } a, b \in \mathbb{N}.$$

O Corolário 2 garante que, para estabelecer a enumerabilidade de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, é suficiente mostrar que f é injetiva. Para tanto, sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tais que $f(a, b) = f(c, d)$, isto é,

$$2^a 3^b = 2^c 3^d.$$

Uma vez que cada natural $n > 1$ pode ser escrito como produto de potências de primos de exatamente uma forma[1],

[1] Esse é o conteúdo do Teorema Fundamental da Aritmética, cuja prova pode ser encontrada na referência [1].

a última igualdade acima implica $a = c$ e $b = d$, isto é, $(a, b) = (c, d)$.

Então, f é realmente injetiva, como precisávamos provar.

$\square$

O corolário a seguir traz uma primeira consequência do teorema anterior.

Corolário 9. *Se A e B são enumeráveis, então $A \times B$ é enumerável.*

Prova. Quer A e B sejam finitos ou infinitos, a enumerabilidade de ambos garante a existência de funções injetivas $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$.

Defina, então, a função

$$h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

pondo

$$h(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Se $a, c \in A$ e $b, d \in B$ forem tais que $h(a, b) = h(c, d)$, então

$$(f(a), g(b)) = (f(c), g(d)).$$

A partir daí, a propriedade fundamental dos pares ordenados garante que $f(a) = f(c)$ e $g(b) = g(d)$. Como f e g são injetivas, segue que $a = c$ e $b = d$, logo, $(a, b) = (c, d)$.

Uma vez que, partindo de $h(a, b) = h(c, d)$ mostramos que $(a, b) = (c, d)$, temos que h é injetiva. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável pelo teorema anterior, o Corolário 2 garante que $A \times B$ é enumerável. $\square$

Observação 10. *Com um pouco mais de trabalho, pode ser mostrado que $A \times B$ é finito se, e só se, A e B forem finitos. Ademais, sendo esse o caso, tem-se*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

De posse do que fizemos até aqui, podemos finalmente mostrar o seguinte

Teorema 11. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

Prova. Observemos inicialmente que

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \mathbb{Q}_-^* \cup \{0\},$$

em que $\mathbb{Q}_+^*$ e $\mathbb{Q}_-^*$ denotam, respectivamente, os racionais positivos e negativos.

Também, como a função $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_-^*$ dada por $f(x) = -x$ é uma bijeção, se mostrarmos que $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável concluiremos que o mesmo sucede com $\mathbb{Q}_-^*$. Portanto, o Corolário 4 garantirá que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Para mostrar que $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável, comecemos recordando que

$$\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \frac{a}{b};\, a, b \in \mathbb{N} \text{ e } \operatorname{mdc}(a, b) = 1 \right\}.$$

Ademais, um elemento $r \in \mathbb{Q}_+^*$ pode ser escrito como $r = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ primos entre si, de uma única maneira. Isso permite definir a função

$$f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

pondo

$$f(r) = (a, b) \text{ se } r = \frac{a}{b}, \text{ com } a, b \in \mathbb{N} \text{ e } \operatorname{mdc}(a, b) = 1.$$

Ademais, a unicidade do par (a, b) garante, a um só tempo, a boa definição e a injetividade de f.

Por fim, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável e f é injetiva, o Corolário 2 garante que $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável. □

A essa altura de nossa discussão, duas questões pertinentes se colocam: como podemos *enumerar* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}_+^*$?

No primeiro caso, podemos começar escrevendo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como a união enumerável dos conjuntos finitos

$$A_1 = \{(1, 1)\},$$

$$A_2 = \{(2,1),(1,2)\},$$

$$A_3 = \{(3,1),(2,2),(1,3)\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_n = \{(n,1),(n-1,2),\ldots,(1,n)\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Em seguida, observando que há

$$1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

para ordenados em $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, escrevemos

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\},$$

com

$$a_1 = (1,1),$$

$$a_2 = (2,1),\ a_3 = (1,2),$$

$$a_4 = (3,1),\ a_5 = (2,2),\ a_6 = (1,3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1} = (n,1),\ \ldots,\ a_{\frac{n(n-1)}{2}+n} = (1,n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A construção de uma enumeração de $\mathbb{Q}_+^*$ requer um argumento ligeiramente mais sofisticado: em vez de utilizar a função f construída na demonstração do teorema anterior, utilizamos a enumeração de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ construída acima.

Mais precisamente, já sabemos que f é injetiva e

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \mathrm{mdc}(x,y) = 1\}.$$

Por sua vez, $\mathrm{Im}(f)$, sendo um subconjunto infinito do conjunto enumerável $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, é ele mesmo enumerável. Portanto, podemos escrever

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),\ldots\}$$

e definir (uma vez que $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathrm{Im}(f)$ é uma bijeção)

$$\mathbb{Q}_+^* = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\},$$

com

$$r_i = \frac{x_i}{y_i}.$$

Em termos práticos, a construção acima equivale a começar listando os racionais positivos obtidos a partir dos pares ordenados dos conjuntos A_1, A_2, A_3, definidos anteriormente,

$$\begin{array}{c} \frac{1}{1}, \\[2mm] \frac{2}{1}, \ \frac{1}{2}, \\[2mm] \frac{3}{1}, \ \frac{2}{2}, \ \frac{1}{3}, \\[2mm] \frac{4}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{1}{4}, \\[2mm] \frac{5}{1}, \ \frac{4}{2}, \ \frac{3}{3}, \ \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

em seguida, percorrendo essa lista de cima para baixo e (ao longo de cada linha) da esquerda para a direita, e apagando todo racional que apareceu anteriormente, ficamos com uma enumeração de $\mathbb{Q}_+^*$:

$$\mathbb{Q}_+^* = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5} \ldots\right\}.$$

Dicas para o Professor

Algumas demonstrações aqui reunidas diferem um pouco das usuais, por razões pedagógicas. Por exemplo, achamos mais natural, para o noviço, construir uma demonstração do

Teorema 3 nos moldes que apresentamos. Alternativamente, uma discussão completa pode ser vista em [2].

De todo modo, duas sessões de 50 minutos devem bastar para apresentar o material aqui reunido.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*, terceira edição, 2022.

2. E. L. Lima. *Curso de Análise, volume* 1, décima primeira edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2014. Rio de Janeiro, SBM, 2023.