Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Leis do Limite - Parte 2

Limites Laterais

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Dezembro de 2022

Portal da Matemática OBMEP

Apresentaremos, nesta aula, vários exercícios a respeito de limites laterais (incluindo limites no infinito). Na segunda seção, após enunciarmos um teorema fundamental sobre a existência de limites laterais, definiremos a função exponencial e estudaremos suas principais propriedades.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Seja* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *a função definida pela regra* $f(x) = \frac{|x^2-3x+2|+|x^2-5x+6|}{2x-4}$. *Determine os limites laterais de* f *no ponto* 2.

Solução. Vejamos que $f(x) = -1$, para cada $x \in (1{,}2)$, enquanto que $f(x) = 1$, para todo $x \in (2{,}3)$. De fato, como $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ e $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, vale, para cada $x \in (1{,}3) \setminus \{2\}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(|x-1|+|x-3|)|x-2|}{2(x-2)} \\ &= \frac{(x-1)-(x-3)}{2} \cdot \frac{|x-2|}{x-2} \\ &= \frac{|x-2|}{x-2}. \end{aligned}$$

Logo, $1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -1$, ao passo que $2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = 1$. Daí, as igualdades $\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm 1$ seguem imediatamente. □

Para o próximo exemplo, confira as convenções estabelecidas após a proposição 5 da primeira aula desse módulo.

Exemplo 2. *Calcule* $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x}-1}$.

Solução. Primeiramente, como $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ e $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x - 1 = -(\sqrt{1-x})^2$ (uma vez que estamos interessados em valores de x menores que 1), um pouco de álgebra elementar dá

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x}-1} &= \frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}{\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x+x^2}\,(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
&= \frac{-\sqrt{1+x+x^2}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{1-x}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{-\sqrt{1+x+x^2}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{-\sqrt{3}\cdot 2}{0^+} = -\infty.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo 3. *Encontre o valor do limite abaixo:*

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right).
$$

Solução. Observando que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{(\cancel{x}+\sqrt{x})-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1},
\end{aligned}
$$

segue da igualdade $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

A seguir, é conveniente lembrar-se de que $\lfloor x \rfloor$ denota a *parte inteira* do número real x (veja o primeiro exemplo da aula anterior).

Exemplo 4. *Sejam a e b números reais positivos. Prove que:*

(*i*) $\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0$.

(*ii*) $\lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = +\infty$.

Solução. Para o item (i), observe que $0 < x < a$ implica $0 < \frac{x}{a} < 1$, de forma que $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$. Assim, $\frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$, para cada x pertencente ao intervalo $(0,a)$, de onde segue a igualdade $\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$.

Quanto ao item (ii), se $-a < x < 0$, então $-1 < \frac{x}{a} < 0$. Portanto, $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = -1$ e, daí,

$$\frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = -\frac{b}{x}, \tag{1}$$

para todo $x \in (-a,0)$. Como $\lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x} = \frac{b}{0^-} = -\infty$, segue de (1) que $\lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x}\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = +\infty$. $\square$

Exemplo 5. *Calcule* $\lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos(\sqrt{\operatorname{sen} t})}{\operatorname{sen}(\sqrt{1-\cos t})}$.

Solução. Vamos lembrar do limite trigonométrico fundamental:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{2}$$

Em particular,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0, \tag{3}$$

pois $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0} \left(x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 0 \cdot 1 = 0$.

Além disso, de acordo com o exemplo 3 da aula *O Teorema do Sanduíche*, do módulo anterior, vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Agora observe as seguintes *mudanças de variável* nos limites acima (vide teorema 4 da aula anterior):

- Por (3), vale $\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\operatorname{sen} t}=0$, de sorte que, tomando $x=\sqrt{\operatorname{sen} t}$ em (4), obtemos

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{\operatorname{sen} t}}{\operatorname{sen} t}=\frac{1}{2}. \tag{5}$$

- Sendo $\lim_{t\to 0}\sqrt{1-\cos t}=\sqrt{1-\cos 0}=0$, podemos tomar $x=\sqrt{1-\cos t}$ em (2) para escrever

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1-\cos t}}=1. \tag{6}$$

Desse modo, pelas relações (2), (4), (5), (6) e as regras de limites, vem que

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos(\sqrt{\operatorname{sen} t})}{\operatorname{sen}(\sqrt{1-\cos t})}=\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos(\sqrt{\operatorname{sen} t})}{\operatorname{sen} t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\sqrt{\frac{t^2}{1-\cos t}}\frac{\sqrt{1-\cos t}}{\operatorname{sen}(\sqrt{1-\cos t})}\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos(\sqrt{\operatorname{sen} t})}{\operatorname{sen} t}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\\
&\quad\cdot\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{t^2}{1-\cos t}}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos t}}{\operatorname{sen}(\sqrt{1-\cos t})}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 6 (IMO/1985 - Longlist). *Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfazem as duas condições a seguir:*

(*a*) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, *para todos* $x,y\in\mathbb{R}$.

(*b*) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Solução. É claro que a função identicamente nula satisfaz as condições no enunciado. Veremos, a seguir, que ela é a única. De fato, fixado um número real a, façamos $x = t + a$ e $y = t$ na equação funcional para obter

$$f(2t + a) + f(a) = 2f(t + a)f(t),$$

para qualquer número real t. Fazendo $t \to +\infty$ na igualdade acima e observando que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t + a) = \lim_{t\to+\infty} f(t + 2a) = 0,$$

vem $f(a) = 0$. Por fim, como o número a foi escolhido arbitrariamente, provamos que f é identicamente nula. $\square$

2 Monotonicidade e limites laterais

Dados um subconjunto não vazio X de $\mathbb{R}$ e uma função real $f : X \to \mathbb{R}$, é lícito analisar o limite lateral à esquerda (resp. direita) de f num ponto a desde que existam pontos no domínio X de f arbitrariamente próximos de a e situados à esquerda (resp. à direita) de a.

De modo mais preciso, o estudo do limite à esquerda (resp. direita) de f em a faz sentido desde que a interseção $X \cap (a - \delta, a)$ (resp. $X \cap (a, a + \delta)$) seja não-vazia, para todo $\delta > 0$ [1].

Assim, se o domínio X da função f for um intervalo (aberto, fechado ou semiaberto) I de extremos a e b, com $a < b$, então faz sentido considerar os limites laterais, à esquerda e à direita, de f em qualquer ponto c interior a I [2]. Entretanto, no ponto a (resp. b), apenas o limite lateral à direita (resp. à esquerda) de f faz sentido.

Por outro lado, se o domínio X da função f for o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, então *não* faz sentido considerar limites laterais de f em ponto algum.

[1] Na literatura, essa condição costuma ser expressa dizendo-se que a é um *ponto de acumulação à esquerda* (resp. *à direita*) do conjunto X. Compare com a definição apresentada na 1ª seção da aula *Limites de Funções*.

[2] Se tais limites existem, é outra história.

Como entre quaisquer dois números reais distintos há sempre um número racional[3], faz sentido considerar os limites laterais de uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ em *qualquer* ponto $a \in \mathbb{R}$. A seguir, veremos um exemplo interessante, nesse sentido.

Dado um número real a, a função $R_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $R_a(x) = 2a - x$ é a reflexão em torno do ponto a: como $(R_a(x)+x)/2 = a$, a é o ponto médio do segmento de extremos x e $R_a(x)$.

Se a for um número racional, então $R_a(x)$ também será racional, sempre que x o for. Por outro lado, se a for irracional, então $R_a(x)$ *nunca* será racional, caso x o seja. Para $a \notin \mathbb{Q}$, vamos definir uma função $S_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, a *reflexão racional* em torno de a, a qual reterá algumas propriedades úteis da função R_a.

Qualquer número racional r se escreve, de modo único, como $r = m_r/n_r$, com $m_r \in \mathbb{Z}, n_r \in \mathbb{N}$ e m_r,n_r primos entre si. Definindo o inteiro p_r como a parte inteira de an_r, é imediato que $\frac{p_r}{n_r} < a < \frac{p_r+1}{n_r}$ (a primeira desigualdade é estrita porque a é irracional). Assim, definimos (acompanhe na figura 1)

$$S_a(r) = \frac{2p_r + 1}{n_r} - r.$$

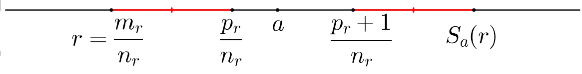

Figura 1: a reflexão racional S_a.

[3]Esse fato será demonstrado na proposição 2 da aula *Continuidade em um Ponto* do módulo de *Funções Contínuas*.

Exemplo 7. *Mostre que a função S_a tem as seguintes propriedades:*

(*i*) $r < a \Rightarrow S_a(r) > a$.

(*ii*) $\lim_{r\to a^-} S_a(r) = a$.

Solução. Para o item (i), se $r = \frac{m_r}{a_r} < a$, então $m_r < an_r$, de sorte que $m_r \leq \lfloor an_n \rfloor = p_r$, ou seja, $r = \frac{m_r}{a_r} \leq \frac{p_r}{n_r}$. Daí, $S_a(r) = \frac{p_r+1}{n_r} + (\frac{p_r}{n_r} - r) > a$.

Para estabelecer o item (ii), começamos observando que a desigualdade $r \leq \frac{p_r}{n_r} < a$, juntamente com o teorema do confronto (que continua válido nessa situação, como é imediato verificar), dão $\lim_{r\to a^-} \frac{p_r}{n_r} = a$.

Afirmação: $\lim_{r\to a^-} n_r = +\infty$.

Com efeito, dado um número natural arbitrário k, seja $\delta > 0$ a menor das distâncias $a - \frac{\lfloor aj \rfloor}{j}$, para $j = 1,2,\ldots,k$. Se, para algum número racional r, tivéssemos $a - r < \delta$ e $n_r \leq k$, valeria $\delta \leq a - \frac{\lfloor an_r \rfloor}{n_r} = a - \frac{p_r}{n_r} \leq a - r < \delta$, o que é impossível. Portanto, devemos ter $n_r > k$, para todo número racional $r \in (a-\delta,a)$, justificando a afirmação feita.

Segue da afirmação acima que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to a^-} S_a(r) &= \lim_{r\to a^-}\left(\frac{2p_r+1}{n_r} - r\right)\\ &= \lim_{r\to a^-}\left(2\frac{p_r}{n_r} + \frac{1}{n_r} - r\right)\\ &= 2a + 0 - a = a,\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Voltando à situação geral de uma função $f : X \to \mathbb{R}$, tome $a \in \mathbb{R}$ tal que haja sentido considerar $\lim_{x\to a^-} f(x)$ (resp. $\lim_{x\to a^+} f(x)$). Diremos que f é limitada à esquerda (resp. à direita) do ponto a quando, para algum $\delta > 0$, a restrição $f_{|X\cap(a-\delta,a)}$ (resp. $f_{|X\cap(a,a+\delta)}$) for limitada.

Evidentemente, se essa função f for monótona, então f será limitada à esquerda e à direita de a, para todo número real a. Nesse sentido, o teorema a seguir garante a existência dos limites laterais acima (muito embora não dê pista alguma sobre como calculá-los, o que não invalida argumentos como o do exemplo anterior).

Teorema 8. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona.*

(a) *Se o limite à esquerda de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à esquerda de a, então existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$.*

(b) *Se o limite à direita de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à direita de a, então existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$.*

Esse teorema será demonstrado na 2ª parte da aula *Continuidade em um Ponto* do módulo de *Funções Contínuas*. Todavia, podemos demonstrar a seguinte versão do teorema 8.

Proposição 9. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Se o limite à esquerda (resp. à direita) de f no ponto a fizer sentido e f for ilimitada à esquerda (resp. à direita) de a, então $\lim_{x\to a^-} f(x)$ (resp. $\lim_{x\to a^+} f(x)$) existe e é infinito.*

Prova. Suponhamos que f seja monótona não-decrescente. Trataremos apenas do limite lateral à esquerda, sendo o argumento para o limite à direita completamente análogo. Afirmamos que $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$. Com efeito, fixemos um ponto $b \in X$, com $b < a$. Dado um número $M > 0$ arbitrário, deve existir algum $x_0 \in X \cap (b,a)$ satisfazendo $f(x_0) > M$. Caso contrário, teríamos $f(b) \le f(x) \le M$, para todo $x \in X \cap (b,a)$, contradizendo o fato de f ser ilimitada à esquerda de a. Logo, sendo $f(x_0) > M, x_0 < a$, definimos o número positivo $\delta = a - x_0$ para ter

$$\begin{aligned} x \in X \cap (a-\delta,a) &\Rightarrow a - x < a - x_0 \Rightarrow x > x_0 \\ &\Rightarrow f(x) \ge f(x_0) \Rightarrow f(x) > M. \end{aligned}$$

Isso estabelece a afirmação e encerra a demonstração. □

Observação 10. *Com adaptações naturais, é possível obter versões do teorema 8 e da proposição 9 para limites no infinito. Por exemplo, se* $f : [a, +\infty)$ *for uma função crescente, então existe* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$*, sendo esse limite finito ou* $+\infty$*, conforme* f *seja ou não limitada.*

A solução do próximo problema (vide [3]) faz uso do teorema 8.

Exemplo 11 (IMO/2020 - Shortlist). *Determine todas as funções* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *satisfazendo*

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1, \tag{7}$$

para quaisquer números reais x *e* y*.*

Solução. Se f é uma função nas condições do enunciado, afirmamos que *f é crescente*. Primeiro vejamos que f é injetiva. Fazendo $x = 1$ em (7), obtemos

$$y = f(1)f(y) + 1 - f(1 + f(y)).$$

Assim, se $f(y_1) = f(y_2)$, então

$$\begin{aligned} y_1 &= f(1)f(y_1) + 1 - f(1 + f(y_1)) \\ &= f(1)f(y_2) + 1 - f(1 + f(y_2)) \\ &= y_2, \end{aligned}$$

ou seja, f é injetiva.

Agora vamos fixar $y > 0$ e observar que a função $g(x) = x + f(xy), x > 0$, também é injetiva. Realmente,

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\Rightarrow f(g(x)) = f(g(x')) \\ &\Rightarrow f(x)f(y) + 1 - y = f(x')f(y) + 1 - y \\ &\Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'. \end{aligned}$$

Dessa forma, se $0 < x_1 < x_2$, temos $g(x_1/y) \neq g(x_2/y)$ ou, ainda, $\frac{x_1}{y} + f(x_1) \neq \frac{x_2}{y} + f(x_2)$, o que também pode ser escrito como $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} \neq \frac{1}{y}$, relação válida para *todo*

$y > 0$. Como qualquer número positivo é da forma $\frac{1}{y}$, para algum $y > 0$, somos levados a concluir que $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} \le 0$, ou melhor, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} < 0$, pois f é injetiva. Daí segue que $f(x_1) < f(x_2)$, demonstrando a afirmação do início.

Pelo teorema 8, para cada $a \ge 0$ existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$, o qual também é um número não-negativo. (Por quê?) Sejam

$$p = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad q = \lim_{x\to p^+} f(x).$$

Fazendo $x \to 0^+$ em (7), vê-se que $f(x), x + f(xy) \to p$, logo $f(x + f(xy)) \to q$ e, portanto, $q + y = pf(y) + 1$, para cada $y > 0$. Em particular, devemos ter $p > 0$, pois, do contrário, teríamos $q + y = 1$, para todo $y > 0$, o que é um absurdo. Logo, f é (a restrição de) uma função afim: $f(y) = \frac{1}{p}y + \frac{q-1}{p}$, isto é, $f(y) = \alpha y + \beta$, em que $\alpha = \frac{1}{p} > 0$ e $\beta = \frac{q-1}{p}$. Substituindo essa última relação na equação funcional, obtemos $\alpha(x+\alpha xy+\beta)+\beta+y = (\alpha x+\beta)(\alpha y+\beta)+1$, ou seja,

$$(\alpha - \alpha\beta)x + (1 - \alpha\beta)y + \alpha\beta + \beta - \beta^2 - 1 = 0, \tag{8}$$

para quaisquer x,$y > 0$. Fazendo $x = y \to 0$, vem $\alpha\beta + \beta - \beta^2 - 1 = 0$. Retornando a equação (8), fazemos $y \to 0$ para obter $(\alpha - \alpha\beta)x = 0$, para todo x, isto é, $\alpha - \alpha\beta = 0$, logo, $\beta = 1$. Daí, $\alpha \cdot 1 + 1 - 1^2 - 1 = 0$ dá $\alpha = 1$, de modo que $f(x) = x + 1$.

Reciprocamente, é fácil verificar que $f(x) = x + 1$ é uma solução da equação funcional (7). Assim, $f(x) = x + 1$ é a única solução. $\square$

2.1 A função exponencial

Seja b um número real positivo. Se a é um número real qualquer, queremos definir a potência b^a como o único número real que admite como aproximações por falta (resp. por excesso) as potências b^r, com r racional e menor (resp. maior) que a. Mais precisamente, queremos escrever

$$b^a := \lim_{\substack{r\to a \\ r\in\mathbb{Q}}} b^r. \tag{9}$$

Precisamos, pois, demonstrar a existência do limite no segundo membro da igualdade acima.

Se o número racional r se escreve como $r = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, lembre que, por definição, $b^r = \sqrt[n]{b^m}$. Na aula *Funções Exponenciais e suas Propriedades*, do módulo Função Exponencial, prova-se que a função exponencial de variável racional, $f_b : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, f_b(r) = b^r$, é crescente ou decrescente, conforme se tenha $b > 1$ ou $0 < b < 1$, respectivamente (obviamente, $f_1 \equiv 1$, ou seja, $1^r = 1$, para cada r racional). Desse modo, para qualquer $b > 0$, f_b é uma função monótona.

Afirmamos, pois, que f_b será limitada à esquerda e à direita de a, para todo número real a. De fato, tomando números racionais r e s tais que $r < a-1, a+1 < s$, vale

$$\min\{f_b(r), f_b(s)\} \leq f_b(x) \leq \max\{f_b(r), f_b(s)\},$$

para cada $x \in \mathbb{Q} \cap (a-1, a+1)$. Daí, pelo teorema 8, existem os limites laterais $\lim_{r\to a^-} b^r$ e $\lim_{r\to a^+} b^r$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Resta, pois, demonstrar que esses limites laterais são iguais. Para tanto, começamos com o seguinte

Lema 12. $\lim_{r\to 0} b^r = 1$.

Prova. Para fixar as ideias, suponhamos $b > 1$. Comecemos mostrando o limite lateral

$$\lim_{r\to 0+} b^r = 1. \tag{10}$$

Recordando a relação $\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$ (veja o exemplo 8 da aula anterior), dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 satisfazendo $b^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon$. Logo, $r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \frac{1}{n_0} \Rightarrow 1 < b^r < b^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$, isto é,

$$r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \frac{1}{n_0} \Rightarrow |b^r - 1| < \varepsilon,$$

demonstrando a igualdade desejada. Agora, (10) dá

$$\lim_{r\to 0^-} b^r \stackrel{r=-s}{=} \lim_{s\to 0^+} b^{-s} = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{b^s} = 1.$$

Por fim, como os limites laterais $\lim_{r\to 0^\pm} b^r$ existem e são iguais a 1, o limite bilateral $\lim_{r\to 0} b^r$ também existe e vale 1. $\square$

Proposição 13. *Para cada número real* a*, o limite* $\lim_{r\to a} b^r$ *existe e é positivo. Além disso, se* a *for um número racional, digamos* $a = \frac{m}{n}$*, então* $\lim_{r\to a} b^r = \sqrt[n]{b^m}$*.*

Prova. Continuamos supondo $b > 1$. Primeiramente, vejamos que cada limite lateral $\lim_{r\to a^-} b^r$ é positivo. De fato, fixando um número racional $s < a$, temos $b^s < b^r$, para cada número racional r do intervalo (s,a). Fazendo $r \to a^-$, o teorema da permanência do sinal nos dá $0 < b^s \leq \lim_{r\to a^-} b^r$

Agora seja a um número irracional e considere a reflexão racional S_a em torno de a (exemplo (7)). Uma vez que $S_a(r) \to a^+$ quando $r \to a^-$, temos $\lim_{r\to a^+} b^r = \lim_{r\to a^-} b^{S_a(r)}$, de onde segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\lim_{r\to a^+} b^r}{\lim_{r\to a^-} b^r} &= \frac{\lim_{r\to a^-} b^{S_a(r)}}{\lim_{r\to a^-} b^r} \\
&= \lim_{r\to a^-} \frac{b^{S_a(r)}}{b^r} \\
&= \lim_{r\to a^-} b^{S_a(r)-r} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pelo lema 12, já que $S_a(r) - r \to a - a = 0$, quando $r \to a^-$. Assim, os limites laterais da função exponencial f_b no ponto a existem e são iguais, de modo que também existe o limite bilateral $\lim_{r\to a} b^r$.

Finalmente, seja a um número racional. Assim,

$$\lim_{s\to a} b^s = b^a \lim_{s\to a} b^{s-a} \overset{r=s-a}{=} b^a \lim_{r\to 0} b^r = b^a,$$

pelo lema 12. $\square$

Pela proposição anterior, a relação (9) define uma função $f_b : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, a *função exponencial de base* b, estendendo a função exponencial de base b e expoente racional. Para cada número real x, temos

$$f_b(x) = b^x := \lim_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r.$$

Concluímos este material colecionando, no próximo resultado, as principais propriedades da função exponencial.

Teorema 14.

(i) *f_b é uma função crescente (resp. decrescente) se $b > 1$ (resp. $0 < b < 1$).*

(ii) *Para cada número real a, $\lim_{x \to a} b^x = b^a$.*

(iii) *$b^x b^y = b^{x+y}$, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$.*

(iv) *$(b^x)^y = b^{xy}$, quaisquer que sejam os números reais x,y.*

(v) *$(bc)^x = b^x c^x$, para quaisquer $b,c > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.*

Prova.
(i) Dados dois números reais x,y, com $x < y$, tome números racionais u e v tais que $x < u < v < y$. Se $b > 1$, então $b^r < b^u < b^v < b^s$ para quaisquer números racionais r e s satisfazendo $x < r < u < v < s < y$. Fazendo $r \to x^+$ e $v \to y^-$, o teorema de permanência do sinal garante que

$$b^x = \lim_{r \to x^+} b^r \leq b^u < b^v \leq \lim_{s \to y^-} b^s = b^y,$$

de onde se conclui a desigualdade $b^x < b^y$. Assim, f_b é crescente (prova-se do mesmo modo que $0 < b < 1 \Rightarrow f_b$ decrescente).

(ii) Segue da monotonicidade de f_b que os limites laterais $\lim_{x \to a^-} b^x$ e $\lim_{x \to a^+} b^x$ existem. Por outro lado, é evidente que $\lim_{x \to a^-} b^x = \lim_{\substack{r \to a^- \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r$ e $\lim_{x \to a^+} b^x = \lim_{\substack{r \to a^+ \\ r \in \mathbb{Q}}} b^r$, de onde seguem as igualdades $\lim_{x \to a^-} b^x = b^a = \lim_{x \to a^+} b^x$, estabelecendo o que nos foi proposto.

(iii) As demais propriedades seguirão das relações já estabelecidas para a função exponencial de variável racional "passando-se o limite". De fato, sabemos que $b^r b^s = b^{r+s}$, para quaisquer $r,s \in \mathbb{Q}$. Fazendo $r \to x$, vem $b^x b^s = b^{x+s}$. Agora fazendo $s \to y$, $b^x b^s \to b^x b^y$, ao passo que, pelo item anterior, $b^{x+s} \to b^{x+y}$.

(iv) De $(a^r)^s = a^{rs}, r,s \in \mathbb{Q}$, e as regras aritméticas para limites, vem $(a^x)^s = a^{xs}$, ao se fazer $r \to x$. Se agora fazemos $s \to y$, obtemos o resultado desejado.

(v) Deixamos esse item ao encargo do leitor. $\square$

Dicas para o Professor

Um fator complicador na solução do exemplo (11) é a impossibilidade de se fazer $x = 0$ ou $y = 0$ na relação funcional (7). Sugerimos que o professor discuta com sua turma a variante daquele exemplo que consiste em tomar o intervalo fechado $[0, +\infty)$ como domínio da função f. A resposta, entretanto, fica inalterada.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo.* 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

3. IMO/2020 - Shortlisted Problems (with solutions) https://www.imo-official.org/problems/IMO2020SL.pdf