Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Regras de Divisibilidade - Parte 2

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de fevereiro de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, continuamos a apresentar exercícios variados envolvendo operações aritméticas, fatoração e divisibilidade de números naturais.

Exemplo 1 (Colégio Naval). *Considere as afirmativas:*

I - *O número* 1147 *não é primo.*

II - *Todo o número da forma abba, onde a e b são algarismos, é divisível por* 11.

III - *Todo número múltiplo de* 5 *e* 15 *é múltiplo de* 75.

IV - *O número de divisores naturais de* 576 *é divisor de* 63.

O número de afirmativas verdadeiras é:

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

Solução. Veja que

$$33^2 = 1089 < 1147 < 1156 = 34^2.$$

Portanto, pelo *crivo de Eratóstenes*, para verificar se 1147 é um número primo ou composto, é suficiente dividir 1147 por todos os primos menores que 33: se uma dessas divisões for exata, 1147 é composto; senão, é primo. Fazendo essa verificação, chegamos a $1147 = 31 \cdot 37$, ou seja, 1147 não é um número primo. Logo, a afirmação I é falsa.

Agora, considere um número natural da forma *abba*, em que a e b são algarismos. Veja que a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares é igual a

$$(a + b) - (b + a) = 0.$$

Assim, pelo critério de divisibilidade por 11, temos que $abba$ é divisível por 11. Daí concluímos que a afirmação II é verdadeira.

A afirmação III é claramente falsa, pois 15 é múltiplo comum a 5 e 15 e não é múltiplo de 75. Uma afirmação verdadeira seria: se a e b são relativamente primos, então um número natural é múltiplo comum de a e b se, e somente se, é múltiplo de ab. Na afirmação III, 5 e 15 não são relativamente primos.

Finalmente, para obtermos o número de divisores de 576, precisamos de sua fatoração: $576 = 2^6 \cdot 3^2$. A partir dela, calculamos a quantidade de divisores de 576 como sendo igual a

$$(6 + 1) \cdot (2 + 1) = 7 \cdot 3 = 21.$$

Logo, a quantidade de divisores de 576 é um divisor de 63, pois $63 = 3 \cdot 21$. Portanto, a afirmação IV é verdadeira.

Desse modo, temos um total de duas afirmações verdadeiras, ou seja, a alternativa correta é a letra **(c)**.

□

Exemplo 2 (Colégio Naval). *O resto da divisão do número* 743^{48} *por* 6 *é:*

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

(e) 5.

Solução 1. Inicialmente, veja que

$$\begin{array}{r|l} 7\,4\,3 & 6 \\ \cline{2-2} 1\,4 & 1\,2\,3 \\ 2\,3 & \\ 5 & \end{array}$$

Desse modo, obtemos

$$743 = 123 \cdot 6 + 5,$$

o que acarreta

$$\begin{aligned} 743^2 &= (123 \cdot 6 + 5)^2 \\ &= 123^2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 123 \cdot 6 \cdot 5 + 5^2 \\ &= 123^2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 123 \cdot 6 \cdot 5 + 25. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{array}{r|l} 2\,5 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} 743^2 &= 123^2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 123 \cdot 6 \cdot 5 + 25 \\ &= 123^2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 123 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 1 \\ &= (123^2 \cdot 6 + 2 \cdot 123 \cdot 5 + 4) \cdot 6 + 1, \end{aligned}$$

ou seja, 743^2 deixa resto 1 quando dividido por 6. Repetindo o mesmo argumento um número finito de vezes, concluímos que $743^{48} = \left(743^2\right)^{24}$ também deixa resto 1 quando dividido por 6. Desse modo, a alternativa correta é a letra **(a)**. $\square$

Solução 2. Claramente, 743^{48} é ímpar, logo, deixa resto 1, 3 ou 5 quando dividido por 6. Mas, como 743 não é múltiplo de 3, também 743^{48} não é múltiplo de 3; assim, o resto de sua divisão por 6 não pode ser 3 (pois números que deixam resto 3 quando divididos por 6 são da forma $6q + 3 = 3(2q + 1)$, um múltiplo de 3). Então, 743^{48} deixa resto 1 ou 5 quando dividido por 6.

Para ver que o resto é 1, e não 5, note que $743 = 3 \cdot 248 - 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} 743^{48} &= \underbrace{(3 \cdot 248 - 1)(3 \cdot 248 - 1) \ldots (3 \cdot 248 - 1)}_{48 \text{ vezes}} \\ &= (\text{uma soma de múltiplos de } 3) + (-1)^{48} \\ &= 3q + 1. \end{aligned}$$

Então, 743^{48} deixa resto 1 quando dividido por 3, logo, também deixa resto 1 quando dividido por 6 (se fosse $743^{48} = 6q + 5$, teríamos $743^{48} = 3(2q + 1) + 2$, logo, deixaria resto 2 quando dividido por 3). $\square$

Exemplo 3 (Colégio Naval). *O resultado da divisão de* 7^{12} *por* 6*, é um número:*

(a) *Inteiro.*

(b) *De parte decimal finita.*

(c) *De parte decimal infinita periódica simples.*

(d) *De parte decimal infinita periódica composta.*

(e) *De parte decimal infinita e não-periódica.*

Solução. Veja que 7 deixa resto 1, quando dividido por 6. Assim, repetindo o raciocínio utilizado em uma qualquer das soluções do exemplo anterior, concluímos que 7^{12} também deixa resto 1, quando dividido por 6. Desse modo, temos que $7^{12} = 6q + 1$, em que q é o quociente da divisão de 7^{12} por 6. Assim,

$$\begin{aligned} 7^{12} = 6q + 1 &\Longrightarrow \frac{7^{12}}{6} = q + \frac{1}{6} \\ &\Longrightarrow \frac{7^{12}}{6} = q{,}1666\ldots. \end{aligned}$$

Concluímos, pois, que o resultado da divisão de 7^{12} por 6 é um número com parte decimal infinita, periódica e composta. $\square$

Exemplo 4 (Colégio Naval). *Se a e b são números naturais e $2a + b$ é divisível por 13, então um número múltiplo de 13 é:*

(a) $91a + b$.

(b) $92a + b$.

(c) $93a + b$.

(d) $94a + b$.

(e) $95a + b$.

Solução. Note que $91 = 7 \cdot 13$. Desse modo, $91a$ é múltiplo de 13. Como $2a + b$ é, por hipótese, múltiplo de 13, obtemos que a soma

$$91a + (2a + b) = 93a + b$$

também é múltiplo de 13, pois é a soma de dois múltiplos de 13. □

Exemplo 5 (Colégio Naval). *O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a:*

(a) 268.

(b) 269.

(c) 270.

(d) 271.

(e) 272.

Solução. Temos

$$\begin{array}{r|l} 357 & 12 \\ \cline{2-2} 117 & 29 \\ 9 & \end{array}$$

Assim, o menor múltiplo de 12 compreendido entre 357 e 3578 é $30 \cdot 12 = 360$. Por outro lado, temos

$$\begin{array}{r|l} 3578 & 12 \\ \cline{2-2} 117 & 298 \\ 98 & \\ 2 & \end{array}$$

Logo, o maior múltiplo de 12 compreendido entre 357 e 3578 é $298 \cdot 12 = 3576$.

Portanto, a quantidade de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual à quantidade de múltiplos de 12 de $30 \cdot 12 = 360$ até $298 \cdot 12 = 2576$, ou seja, é igual à quantidade de números naturais de 30 até 298, que, por sua vez, é igual a

$$298 - 30 + 1 = 269.$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(b)**. $\square$

Exemplo 6 (Colégio Naval - Adaptado). *Um número natural N tem 2005 divisores positivos. Sobre a quantidade de primos distintos na decomposição de N em fatores primos, podemos afirmar que:*

(a) *É menor ou igual a 2.*

(b) *É igual a 3.*

(c) *É igual a 4.*

(d) *É igual a 5.*

(e) *É maior ou igual a 6.*

Solução. Temos que $2005 = 5 \cdot 401$. Além disso, $19^2 = 361 < 401 < 441 = 21^2$ e 401 não é divisível por primo algum menor ou igual a 19 (verifique isso!). Logo, 401 é primo (pelo crivo de Eratóstenes), e $2005 = 5 \cdot 401$ é a decomposição de 2005 em fatores primos.

Agora, a fórmula para o cálculo do número de divisores positivos de um natural a partir de sua fatoração em primos garante que há exatamente duas possibilidades para um número que possui 2005 divisores positivos:

- Ele é uma potência de um único número primo, com expoente 2004 (por exemplo, 2^{2004}).
- Ele é o produto de duas potências de primos distintos, uma com expoente 4 e outra com expoente 400 (por exemplo, $2^4 \cdot 3^{400}$).

Portanto, o item correto é **(a)**. □

Exemplo 7 (CMRJ). *No número $m = 569a0b$, temos que b é o algarismo das unidades e a o algarismo das centenas. Sabendo que m é divisível por 45, mas não é divisível por 10, pode-se afirmar que o resto da divisão de m por 11 é:*

(a) 0.

(b) 1.

(c) 5.

(d) 7.

(e) 10.

Solução. Sabendo que m é divisível por 45, temos que m é divisível por 9 e por 5. Em particular, sendo divisível por 5, seu algarismo das unidades vale 0 ou 5. Contudo, como m não é divisível por 10, seu algarismo das unidades não pode ser 0. Assim, $b = 5$.

Uma vez que m é divisível por 9, a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Dessa forma, $5+6+9+a+0+5 = 25+a$ deve ser divisível por 9. Logo, o único valor possível para o algarismo a é 2, de sorte que $m = 569205$.

Por fim, como

$$\begin{array}{cccccc|l}
5 & 6 & 9 & 2 & 0 & 5 & 1\,1 \\ \cline{7-7}
 & 1 & 9 & & & & 5\,1\,7\,4\,5 \\
 & & 8 & 2 & & & \\
 & & & 5 & 0 & & \\
 & & & & 6 & 5 & \\
 & & & & 1 & 0 &
\end{array}$$

obtemos que o resto da divisão de m por 11 é 10, ou seja, a alternativa correta é a letra **(e)**. □

Exemplo 8 (Colégio Naval). *Quantos são os números primos maiores que 100 e menores que 200, nos quais o algarismo das dezenas é par e maior que o das unidades?*

(a) *Um.*

(b) *Dois.*

(c) *Três.*

(d) *Quatro.*

(e) *Cinco.*

Solução. Todos os números primos maiores que 2 são ímpares, logo, como os números que têm algarismo das unidades igual a 5 são múltiplos de 5, concluímos que o algarismo das unidades de qualquer número primo maior que 5 deve ser 1, 3, 7 ou 9. Assim, os possíveis números primos que estão entre 100 e 200 e nos quais o algarismo das dezenas é par e maior que o das unidades são

$$121, 141, 143, 161, 163, 181, 183 \text{ e } 187.$$

Entretanto, temos que 121, 143 e 187 são múltiplos de 11; 141 e 183 são múltiplos de 3; 161 é múltiplo de 7. Quanto as demais números, 163 e 181, o crivo de Eratóstenes permite concluir facilmente que eles são, de fato, primos (verifique isso!). Assim, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Exemplo 9. *Sabendo que o número*

$$\underbrace{100\ldots0}_{k+1\ \textit{algarismos}}$$

possui 81 *divisores positivos, qual é o valor de k?*

Solução. Inicialmente, observe que

$$\underbrace{100\ldots0}_{k+1 \text{ algarismos}} = 10^k.$$

Nesse ponto, um erro muito comum é fazer $k = 81-1 = 80$. Entretanto, só podemos calcular a quantidade de divisores positivos de um número natural multiplicando os sucessores dos expoentes dos **primos** que aparecem na sua fatoração.

Assim, antes de calcular o número de divisores positivos, precisamos da fatoração de 10^k como produto de potências de primos distintos, o que é fácil: como $10 = 2 \cdot 5$, temos

$$10^k = (2 \cdot 5)^k = 2^k \cdot 5^k.$$

Agora, uma vez que 2 e 5 são números primos, concluímos que 10^k tem $(k+1) \cdot (k+1) = (k+1)^2$ divisores positivos, de sorte que deve ser

$$(k+1)^2 = 81.$$

Daí, obtemos $k + 1 = 9$, ou seja, $k = 8$.

$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados, antes de resolver cada problema. Em particular, é importante que os alunos conheçam as regras de divisibilidade por 3, 5, 9 e 11, bem como propriedades como "potência de uma potência" e "potência de um produto". O crivo de Eratóstenes também merece ser revisado, uma vez que foi utilizado na solução de três exemplos distintos.

Antes de apresentar o exemplo 2, é recomendável que sejam feitos alguns outros exemplos, mais simples, que permitam compreender o seguinte fato: se n é um número natural não nulo, então o resto da divisão do produto de alguns números naturais por n é igual ao resto da divisão do produto dos restos das divisões desses números por n.