Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

Regra de Três Simples e Composta

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

1 Regra de três simples

Nesta aula, aprenderemos um método prático e bastante conhecido de resolver problemas que envolvam grandezas (diretamente ou inversamente) proporcionais: **a regra de três**. Trata-se de uma abordagem muito próxima daquela que já desenvolvemos nas aulas anteriores. Iniciaremos a aula ilustrando o método através do exemplo a seguir:

Exemplo 1. *Um conjunto de três impressoras industriais, todas iguais, é capaz de imprimir* 2400 *folhas em uma hora, caso as três máquinas trabalhem juntas. Quantas folhas serão produzidas se utilizássemos sete dessas impressoras?*

Solução. Veja que, sob condições normais de funcionamento, o número de impressoras é *diretamente proporcional* ao número de folhas (quanto mais impressoras iguais, mais folhas serão impressas, de maneira proporcional). Dessa forma, se x é o número de folhas produzidas quando há sete impressoras trabalhando em conjunto, temos que $(2400, x, 3, 7)$ é uma quádrupla proporcional.

Também podemos organizar esta informação em uma tabela de duas colunas, cada uma representando uma das variáveis número de impressoras (NI) e número de folhas (NF) da situação:

NI ($\uparrow$)	**NF** ($\uparrow$)
3	2400
7	x

Sendo esse o caso, cada linha da tabela representa uma das situações consideradas no enunciado. Para indicar que as duas variáveis são diretamente proporcionais, colocamos duas setas para cima, uma ao lado de cada um dos nomes.

Pela definição de proporcionalidade, a tabela anterior nos fornece a igualdade:

$$\frac{3}{7} = \frac{2400}{x}.$$

Multiplicando em xis e isolando o valor x, concluímos que

$$x = \frac{7 \times 2400}{3} = 7 \times 800 = 5600.$$

Portanto, sete iguais impressoras trabalhando juntas produziriam 5600 folhas por hora. □

No exemplo anterior, podemos aferir a origem do termo "*regra de três*": a partir de **três** informações dadas, temos condições de determinar uma quarta informação através da proporcionalidade.

A seguir, veremos como o método da regra de três se aplica quando temos variáveis que são inversamente proporcionais.

Exemplo 2. *Cinco homens levam* 20 *dias para construir um telhado. Quanto tempo um conjunto de oito homens levaria para realizar este mesmo serviço? Admita que, todos os trabalhadores envolvidos em ambas as situações têm capacidades de trabalho equivalentes.*

Solução. Como estamos supondo que os trabalhadores envolvidos em ambas as situações têm capacidades de trabalho equivalentes, o número de homens envolvido no trabalho é inversamente proporcional ao número de dias gastos para terminar o telhado (quanto mais homens, menos dias, de maneira proporcional). Dessa forma, se x é o número de dias trabalhados para terminar o serviço quando há oito homens, temos que $(20, x, 8, 5)$ é uma quádrupla proporcional.

Também podemos organizar esta informação em uma tabela de duas colunas, cada uma representando uma das variáveis número de homens (NH) e número de dias (NF) da situação:

NH ($\uparrow$)	**ND** ($\downarrow$)
5	20
8	x

Para indicar que as duas variáveis são inversamente proporcionais, colocamos duas setas, uma para cima e outra para baixo, ao lado de cada um dos nomes.

Pela definição de proporcionalidade, a tabela anterior nos dá a igualdade:

$$\frac{5}{8} = \frac{x}{20}.$$

(Veja que a fração indicada pela variável com seta para baixo é invertida!) Multiplicando em xis e isolando o valor x, concluímos que

$$x = \frac{5 \times 20}{8} = \frac{100}{8} = 13,5.$$

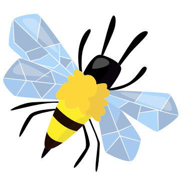
Portanto, serão necessários treze dias e meio para terminar o telhado. □

Você deve ter percebido que não há uma diferença significativa entre o método da regra de três e a forma que vimos anteriormente para resolver problemas sobre proporcionalidade. De fato, o leitor pode até mesmo achar que estamos apresentando um método mais trabalhoso à toa. Porém, na próxima seção apresentaremos o método da regra de três composta e, nesse caso, veremos que utilizar os esquemas de tabelas e setas pode tornar-se uma grande vantagem.

2 Regra de Três Composta

Esse método consiste em uma generalização da regra de três simples, bastante útil para o caso em que há mais de duas variáveis envolvidas. Por questões didáticas, antes de formalizarmos o método, começaremos esta seção com o exemplo a seguir, que foi retirado da primeira fase de uma edição da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Exemplo 3 (OBM). *Um galão de mel fornece energia suficiente para uma abelha voar* 7 *milhões de quilômetros. Quantas abelhas iguais a ela conseguiriam voar mil quilômetros se houvesse* 10 *galões de mel para serem compartilhados entre elas?*



Solução. O procedimento é muito semelhante ao método descrito na seção anterior. Primeiramente, veja que há três variáveis distintas: abelhas, galões de mel e distâncias. Por isso, montamos uma tabela com três colunas (uma para cada variável) e duas linhas (uma para cada uma das situações apresentadas), conforme ilustrado a seguir:

Abelhas	**Galões**	**km**
1	1	7×10^6
x	10	1000

Agora, precisamos descobrir quais grandezas são diretamente proporcionais e quais são inversamente proporcionais. Para tanto, começaremos pela coluna em que há a incógnita x, colocando uma seta para cima nesta variável. Nosso próximo objetivo é relacionar as outras duas variáveis (galões de mel e quilômetros) com a variável "abelhas". Faremos isso em duas etapas, da seguinte forma:

- Fixado o número de quilômetros, observe que, ao aumentarmos o número de abelhas, devemos aumentar também o número de galões para fornecer mais energia às abelhas. Dessa forma, "abelhas" e "galões" são diretamente proporcionais. Representamos esta relação escrevendo um seta para cima ao lado da descrição da variável "galões de mel" na tabela (veja a próxima tabela).
- Fixado o número de galões a ser consumido pelas abelhas, um aumento no número de abelhas levará uma diminuição no número de quilômetros percorridos. Isto porque uma quantidade maior de abelhas deverá compartilhar a mesma quantidade de galões de mel. Dessa forma, "abelhas" e "quilômetros" são inversamente proporcionais, relação que representamos escrevendo um seta para baixo ao lado da descrição da variável "quilômetros" na tabela.

Após esta análise inicial, ficaremos com a seguinte tabela:

Abelhas ($\uparrow$)	**Galões** ($\uparrow$)	**km** ($\downarrow$)
1	1	7×10^6
x	10	1000

Para, a partir dela, montarmos a equação de proporcionalidade, escrevemos uma fração para cada coluna da tabela, invertendo as frações que correspoderem às variáveis com setas para baixo; em nosso caso, esse procedimento fornece as frações

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad \frac{1000}{7 \times 10^6}.$$

Agora fazemos a primeira equação igual ao produto das demais:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{10} \times \frac{1000}{7 \times 10^6}.$$

Por fim, multiplicando em xis e simplificando as potências de 10, obtemos:

$$x = \frac{10 \times 7 \times 10^6}{1000} = 70.000.$$

Portanto, teríamos um total de 70.000 abelhas. □

Também poderíamos ter resolvido o exemplo anterior criando uma nova variável, chamada "*galões por quilômetro*". A proporcionalidade direta entre abelhas e galões e a proporcionalidade inversa entre abelhas e quilômetros garante que o número de abelhas será diretamente proporcional ao montante dado por esta nova variável.

Dessa forma, o problema ficaria reduzido a uma regra de três simples, dada pela tabela a seguir:

Abelhas ($\uparrow$)	**Galões/km** ($\uparrow$)
1	$\frac{1}{7\times 10^6}$
x	$\frac{10}{1000}$

Por sua vez, ela forneceria de pronto a igualdade

$$\frac{1}{x} = \frac{1/(7 \times 10^6)}{10/1000} = \frac{1}{7 \times 10^6} \times \frac{1000}{10}$$

que, uma vez resolvida em x, nos daria novamente $x = 70.000$.

O argumento descrito na solução alternativa acima mostra que o método de regra de três composta pode ser encarado como uma *redução lógica* ao método de regra de três simples.

Neste ponto, é importante esclarecermos os motivos que fazem o algoritmo apresentado funcionar. A lógica por detrás do algoritmo é baseada no fato que a produtividade é proporcional ao número de elementos responsáveis pela produção. Por exemplo, no exercício anterior, o número de abelhas (elementos responsáveis pela produção) é diretamente proporcional à produtividade (Galões/km). Por outro lado, essa explicação ainda não é suficiente pois ainda não deixamos claro o que significa "produtividade". Para resolvermos esse dilema, pense na produtividade como a razão entre produto (aquilo que é gerado) e insumo (aquilo que é gasto). Voltando mais uma vez ao exercício anterior, os galões são transportados e para isso gastam-se quilômetros. Dessa forma, os galões são identificados como produto e os quilômetros como insumos. Portanto, a produtividade será dada por Galões/km.

Para fixar essa explicação, vejamos mais um exemplo.

Exemplo 4. *Em uma empresa de construção,* 20 *caminhões são capazes de descarregar* 160m^3 *de areia em oito horas. Quantos caminhões serão necessários para descarregar* 125m^3 *de areia em cinco horas?*

Solução. Seguiremos as etapas delineadas na primeira solução dada ao exemplo anterior.

- Veja que, fixado o número de horas, ao aumentarmos o número de caminhões aumentaremos o volume de areia descarregada. Dessa forma, "caminhões" e "areia" são variáveis diretamente proporcionais. Representamos esta relação de proporcionalidade direta escrevendo, na tabela abaixo, um seta para cima ao lado da descrição destas duas variáveis.

- Fixado o volume de areia a ser descarregado, um aumento no número de caminhões levará a uma diminuição no número de horas utilizadas. Dessa forma, "caminhões" e "horas" são variáveis inversamente proporcionais. Representamos esta relação de proporcionalidade inversa escrevendo, na tabela abaixo, um seta para baixo ao lado da descrição da variável "horas".

Caminhões ($\uparrow$)	**Areia** ($\uparrow$)	**Horas** ($\downarrow$)
20	160	8
x	125	5

A partir daí podemos montar a equação de proporcionalidade:

$$\frac{20}{x} = \frac{160}{125} \times \frac{5}{8}$$

A partir daí, obtemos

$$x = 20 \times \frac{125}{160} \times \frac{8}{5}.$$

Simplificando 160 por 8 e 125 por 5, a igualdade acima fornece

$$x = 20 \times \frac{25}{20} = 25.$$

$\square$

Pensando em termos de insumos e produtos, veja que as horas são gastas e a areia transportada. Portanto, areia é produto e horas são o insumo.

Em exercícios mais gerais, podemos encontrar mais de um produto ou mais de um insumo. Nesse caso, a produtividade será dada pela razão da multiplicação dos produtos pela multiplicação dos insumos. Na aula seguinte, abordaremos esses casos mais gerais.

3 Sugestões ao Professor

Recomendamos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para apresentar este material. No primeiro, descreva o método da regra de três simples resolvendo os exercícios relacionados; se a aula avançar bem, pode ser interessante resolver os exercícios dos materiais teóricos anteriores utilizando o novo método. No segundo encontro, apresente o método da regra de três composta, se possível refazendo os exemplos dados com outros valores, para melhor fixar as ideias.

É muito importante o professor verificar se os alunos estão conseguindo diferençar adequadamente quando duas grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Nesse sentido, é útil mostrar como uma análise errada pode levar a resultados incorretos para os exercícios.

Créditos pelas figuras:
`www.freepik.com`