Material Teórico - Módulo Trigonometria I

Funções secante e cossecante

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de dezembro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 As funções secante e cossecante

A função *secante* de x, onde x é um número real tal que $\cos(x) \neq 0$, é definida pela expressão

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)};$$

a função *cossecante* de x, para $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(x) \neq 0$, é definida por

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Domínio

Note que, quando $\cos(x) = 0$, a função $\sec(x)$ *não* está definida, pois não podemos efetuar divisões por 0. Como $\cos(x) = 0$ se, e somente se, x é da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, para algum inteiro k, podemos calcular $\sec(x)$ para quaisquer outros valores de x. Assim, o domínio da função sec é o conjunto:

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De forma semelhante, $\csc(x)$ não está definida somente quando $\operatorname{sen}(x) = 0$, e isso acontece sempre que x é da forma $k\pi$, para algum inteiro k. Assim, o domínio da função csc é o conjunto:

$$\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Imagem

Veja que se y é um número real tal que $0 < y \leq 1$, então $\frac{1}{y} \geq 1$; por outro lado, se y satisfaz $-1 \leq y < 0$, então $\frac{1}{y} \leq -1$. Assim, se $0 < |y| \leq 1$, segue que $\frac{1}{|y|} \geq 1$.

Como sabemos que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ para todo x e que a secante não está definida quando $\cos(x) = 0$, concluímos que $|\sec(x)| \geq 1$ para todo x tal que $\cos(x) \neq 0$, ou seja, $\sec(x) \geq 1$ ou $\sec(x) \leq -1$ para todo tal x.

Reciprocamente, dado um real y tal que $|y| \geq 1$, temos $y \geq 1$ ou $y \leq -1$, logo, $0 < \frac{1}{y} \leq 1$ ou $-1 \leq \frac{1}{y} < 0$. Em qualquer caso, $\frac{1}{y}$ pertence ao intervalo $[-1{,}1]$, que é precisamente a a imagem da função cosseno. Portanto, existe x real tal que $\cos(x) = \frac{1}{y}$; daí, $\sec(x) = y$.

A argumentação dos dois parágrafos acima mostrou que um real y pertence à imagem da função secante se, e só se, $y \geq 1$ ou $y \leq -1$. Em outras palavras, a imagem da função secante é o conjunto de todos os reais, com exceção daqueles pertencentes ao intervalo aberto $(-1{,}1)$. De outra forma, a imagem da função secante é o conjunto

$$\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}.$$

Exatamente o mesmo argumento pode ser aplicado à função csc, de sorte que a imagem da função csc é o mesmo conjunto acima.

No círculo trigonométrico

A secante e a cossecante de um arco também podem ser obtidas através do círculo trigonométrico. Contudo, diferentemente das funções seno, cosseno, tangente e cotangente, não há eixos trigonométricos para a secante nem para a cossecante. Outrossim, há uma maneira de visualizá-las geometricamente que pode ser demonstrada facilmente, via semelhança de triângulos.

Como sempre, seja P um ponto sobre o círculo trigonométrico tal que o arco AP meça α, ou seja, $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Tracemos a reta que passa por P e é tangente ao círculo, como mostrado na figura 1. Seja W a interseção dessa reta com o eixo dos senos (eixo vertical) e V a interseção com o eixo dos cossenos (eixo horizontal). Afirmamos que $W = (0, \csc\alpha)$ e $V = (\sec\alpha, 0)$, ou seja, a ordenada de W é a cossecante de α enquanto a abcissa de V é a secante de α. Abaixo, consideramos o caso em que P está no primeiro quadrante, deixando a análise dos demais casos para o leitor.

Veja que $\overline{OP} = 1$. Assim, a semelhança dos triângulos

OPP' e OVP dá:

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\overline{OV}} \implies \overline{OV} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

Por outro lado, a semelhança dos triângulos OPP' e WOP dá:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1} = \frac{1}{\overline{OW}} \implies \overline{OW} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \csc\alpha.$$

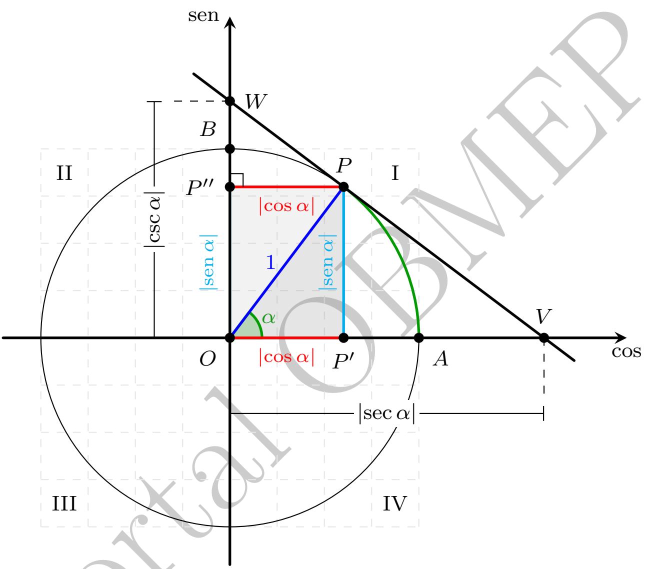


Figura 1: representação da secante e da cossecante no círculo trigonométrico.

Mas lembre-se de que a secante *não está* definida nos arcos em que o cosseno é igual ao zero, ou seja, nos mesmos arcos em que a tangente não está definida, isto é, nos arcos da forma $\pi/2 + k\pi$, para algum k inteiro. A interpretação geométrica disso é que para tais arcos o ponto V não está definido, já que, em uma tal situação, a reta que passa por P e tangencia o círculo trigonométrico é paralela ao eixo dos cossenos.

Da mesma forma, a cossecante não está definida no arcos em que o seno é zero, ou seja, nos arcos da forma $k\pi$, para algum k inteiro. Em tais arcos, o ponto W não está definido.

Por fim, é claro que o sinal de $\sec\alpha$ é o mesmo que o de $\cos\alpha$. Analogamente, o sinal de $\csc\alpha$ é o mesmo que o de $\operatorname{sen}\alpha$.

Gráficos

Na figura 2 exibimos o gráfico da função $y = \sec(x)$ (em laranja). Aqui, vamos descrever o passo a passo que seguimos para obter e entender o formato desse gráfico.

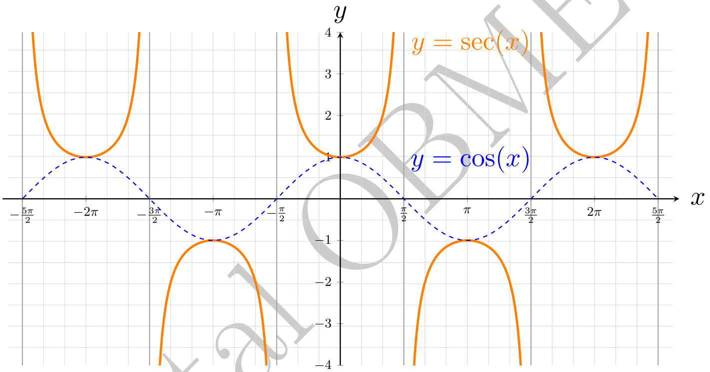


Figura 2: gráfico da secante no intervalo de $-5\pi/2$ a $5\pi/2$ (em laranja), junto o gráfico da função cosseno (tracejado em azul).

Como $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$, começamos desenhando o gráfico da função cos, pontilhado em azul na figura 2 . Note que ele não faz parte do gráfico de sec, mas, conforme veremos, é conveniente que ele seja usado como um "referencial" para ajudar a entender o comportamento do gráfico da função secante.

Sempre que $\cos(x) = 1$, temos $\sec(x) = 1/1 = 1$; da mesma forma, quando $\cos(x) = -1$, temos $\sec(x) = 1/(-1) = -1$. Assim, o gráfico de $\sec(x)$ toca o gráfico de $\cos(x)$ nos pontos em que $\cos(x)$ é igual a 1 ou -1. Ademais, note os sinais de $\cos(x)$ e de $\sec(x)$ iguais para todo x no domínio de $\sec(x)$, ou seja, os números $\sec(x)$ e $\cos(x)$ são ambos positivos ou ambos negativos.

Também (e conforme já observamos), lembre-se de que $0 \leq |\cos x| \leq 1$ e que $|\sec x| \geq 1$. Assim, o gráfico da função cosseno está sempre contido na faixa do plano cartesiano correspondente aos pontos (x,y) tais que $-1 \leq y \leq 1$, enquanto o gráfico da função secante está sempre contido na porção do plano cartesiano correspondente aos pontos (x,y) tais que $y \leq -1$ ou $y \geq 1$.

Por fim, note que como $|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 0$, quanto maior for $|\cos x|$ menor será $|\sec x|$; por outro lado, à medida que $|\cos x|$ aproxima-se de zero, o valor de $|\sec x|$ cresce indefinidamente.

Com essas informações, basta variarmos x, marcarmos os pontos $(x, \sec(x))$ correspondentes e esboçarmos o gráfico. Por exemplo, quando x varia de 0 a $\pi/2$, o cosseno de x diminui de 1 até 0 e o valor de $\sec(x)$ aumenta de 1 para valores arbitrariamente grandes.

A figura 2, mostra apenas um trecho do gráfico, até quando $\sec(x)$ vale aproximadamente 4. Mas, é importante perceber que o gráfico não para aí. À medida que x aproxima-se de $\frac{\pi}{2}$ o gráfico continua subindo, passando por 10, 100, 1000, etc, antes mesmo de x chegar a ser $\pi/2$ (é claro que isso não caberia no papel). Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o número $\sec(x)$ não está definido. Passando um pouco de $\frac{\pi}{2}$ (mas antes de chegar a π), o valor de $\cos(x)$ será negativo e muito próximo de 0, o que implica que $\sec(x)$ será um número negativo, mas de valor absoluto muito grande. Daí $\sec(x)$ cresce até atingir um máximo local, $\sec(\pi) = -1$, quando ele volta a descrescer. Acompanhe na figura 2 o que acontece nos demais intervalos, comparando os gráficos de cos e sec.

Agora, vejamos como fica o gráfico da função csc (figura 3). Para todo número real, x, temos que $\text{sen}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, e vimos anteriormente que isso implica que o gráfico da função sen é obtido movendo-se o gráfico de cos de $\pi/2$ unidades para a direita, ou seja, transladando-o horizontalmente.

A mesma relação vale para os gráficos das funções csc e sec. De fato, quando $\operatorname{sen} x \neq 0$, vale que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, logo,

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

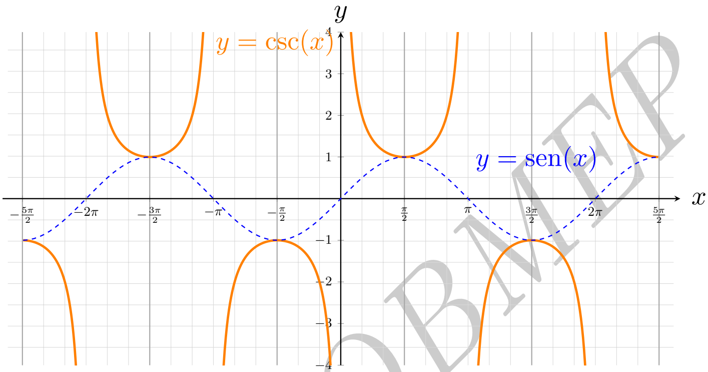


Figura 3: gráfico da função cossecante no intervalo de $-5\pi/2$ a $5\pi/2$ (em laranja), junto o gráfico da função seno (tracejado em azul).

Assim, o gráfico de csc é obtido movendo-se o gráfico de sec de $\pi/2$ unidades para a direita (compare os gráficos das figuras 2 e 3).

Observação 1. *Cada trecho dos gráficos exibidos nas figuras 2 e 3 lembra o formato de uma parábola. Contudo, vale ressaltar que esses gráficos* ***não são*** *parábolas. Na aula "Gráfico de uma Função Quadrática", do módulo "Função Quadrática" vimos que as parábolas possuem diversas propriedades geométricas que são satisfeitas apenas por gráficos de funções quadráticas (ou rotações desses gráficos).*

Exemplo 2 (Academia da Força Aérea). *Sejam as funções reais f, g e h definidas por:*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x},$$

$$g(x) = |\sec x| \quad e \quad h(x) = |\csc x|,$$

nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo $[0{,}2\pi]$. *A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de* f *e* g, f *e* h, *e* g *e* h *é (são), respectivamente:*

(a) 0, 0 *e* 4.

(b) 3, 1 *e* 4.

(c) 2, 3 *e* 4.

(d) 0, 2 *e* 3.

Solução. Para cada par de 2 das 3 funções dadas, vamos calcular a quantidade de vezes que seus gráficos intersectam-se quando x varia na intersecção de seus domínios com o intervalo fechado $[0{,}2\pi]$.

Antes disso, veja que podemos simplificar bastante a função $f(x)$: como $\csc(x) = 1/\operatorname{sen}(x)$, temos que $1/\csc(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $1/\sec(x) = \cos(x)$; assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{1}{\csc(x)} + \cos(x) \cdot \frac{1}{\sec(x)} \\ &= (\operatorname{sen}(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1, \end{aligned}$$

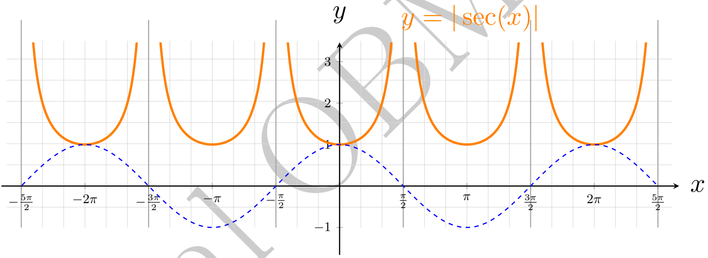
em que usamos a relação fundamental da Trigonometria na última igualdade. Dessa forma, $f(x) = 1$ para todo x em seu domínio. Contudo, é importante observar que o domínio da função $f(x)$ não é todo o intervalo $[0{,}2\pi]$. Realmente, pela expressão original que define $f(x)$, precisamos excluir desse intervalo os pontos em que $\cos(x) = 0$ e também os pontos em que $\operatorname{sen}(x) = 0$. Ou seja, para obter o domínio de f, devemos remover os números 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ e 2π do intervalo $[0{,}2\pi]$.

Interseções dos gráficos de f *e* g: veja que $g(x) = |\sec x| \geq 1$ para todo x, enquanto $f(x) = 1$ para todo x. Assim, para que $f(x) = g(x)$, precisamos ter $g(x) = 1$. Apesar de que há três pontos no intervalo $[0{,}2\pi]$ em que $g(x) = 1$, a saber $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$, esses pontos não pertencem ao domínio de f. Logo, os gráficos de f e g nunca se intersectam.

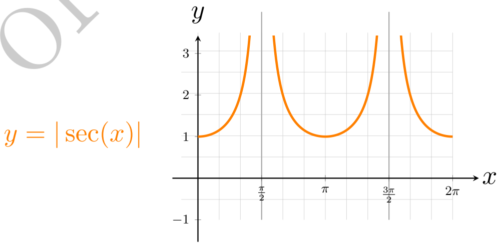
Interseções dos gráficos de f e h: o raciocínio é idêntico ao caso anterior. Há dois pontos para os quais $h(x) = 1$, quando x está no intervalo $[0,2\pi]$. Porém, esses pontos não pertencem ao domínio de f.

Interseções dos gráficos de g e h: nesse caso, vamos analisar as curvas dos gráficos de g e h e contar os pontos de interseção entre elas.

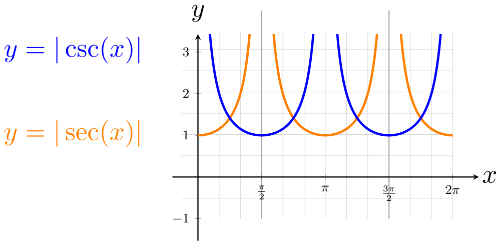
O gráfico de $g(x) = |\sec x|$ é sempre positivo (ao contrário do gráfico de sec). Também, ele é obtido, a partir do gráfico de sec, refletindo, em torno do eixo-x, os trechos do gráfico que estão abaixo do eixo-x. Fazendo isso com o gráfico laranja da Figura 1, obtemos a figura abaixo.



Contudo, lembre-se de que a questão pede para restringir o domínio ao intervalo $[0,2\pi]$. Assim, ficamos apenas com:



Fazendo o mesmo com o gráfico de $h(x) = |\csc x|$ e desenhando ambos no mesmo sistema de eixos, obtemos a próxima figura:



Com isso, podemos observar que os gráficos encontram-se exatamente quatro vezes quando x varia de 0 a 2π. Assim, a resposta para o problema é a alternativa de letra (a): 0, 0 e 4 interseções.

$\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos. Sugerimos também que o professor trabalhe os exercícios contidos na seção “Caderno de Exercícios” deste módulo. Vários deles encontram-se com um esboço de solução no caderno.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [3] traz um curso completo de Trigonometria, no âmbito do Ensino Médio. Por fim, a referência [2] traz várias aplicações da Trigonometria em nível de Ensino Superior.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2022.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.