Material Teórico - Módulo de Divisibilidade

Critérios de Divisibilidade

Sexto Ano

Prof. Angelo Papa Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Um *critério de divisibilidade* é uma regra que permite avaliarmos se um dado número natural é ou não divisível por outro número natural, sem que seja necessário efetuarmos a divisão.

Nesta aula exibiremos os principais critérios de divisibilidade e explicaremos porque esses critérios funcionam.

1 Critério de divisibilidade por potências de 2

O primeiro critério de divisibilidade a ser estudado é muito simples:

> Um número é divisível por 2 quando é par.

Para identificar um número par, basta observarmos o algarismo da unidade desse número: números pares têm algarismo da unidade igual a $0, 2, 4, 6$ ou 8. Dessa forma, podemos afirmar que um número é divisível por 2 quando seu algarismo das unidades é divisível por 2.

Exemplo 1. *Os números* $2014, 1622, 1500, 416$ *e* 888 *são divisíveis por* 2*, pois são pares. Os números* $1777, 2015, 456789, 41253$ *e* 111 *não são divisíveis por* 2*, pois são ímpares.*

Vamos ao próximo critério:

> Um número N é divisível por 4 quando seus **dois** últimos algarismos formam um número divisível por 4, ou seja, quando o número formado pelos algarismos das dezenas e das unidades de N é divisível por 4.

Exemplo 2. *Os números* $1316, 2208, 145728$ *e* 74648 *são divisíveis por* 4*, pois seus dois últimos algarismos, respectivamente* $16, 08, 28$ *e* 48*, formam números divisíveis por* 4*. Os números* $4443, 1817, 2015$ *e* 63663 *não são divisíveis por* 4*, pois seus dois últimos algarismos, respectivamente* $43, 17, 15$ *e* 63*, formam números que não são divisíveis por* 4*.*

> Um número N é divisível por 8 quando seus **três** últimos algarismos formam um número divisível por 8, ou seja, quando o número formado pelos algarismos das centenas, dezenas e unidades de N é divisível por 8.

Exemplo 3. *Os números* $14136, 13184, 2088$ *e* 111112 *são divisíveis por* 8*, pois os números formados por seus três últimos algarismos, respectivamente* $136 = 8 \cdot 17, 184 = 8 \cdot 23, 088 = 8 \cdot 11$ *e* $112 = 8 \cdot 14$*, são múltiplos de* 8*. Os números* $1881, 321123, 777778$ *e* 91919292*, pois os números formados por seus três últimos algarismos, respectivamente* $881, 123, 778$ *e* 292*, não são divisíveis por* 8*.*

Comparando esses três critérios de divisibilidade, vemos que surge um *padrão*, ou seja, uma propriedade similar que se repete nos três casos:

- Um número natural N é divisível por 2^1 se o número formado pelo último algarismo de N for divisível por 2^1.
- Um número natural N é divisível por 2^2 se o número formado pelos 2 últimos algarismos de N for divisível por 2^2.
- Um número natural N é divisível por 2^3 se o número formado pelos 3 últimos algarismos de N for divisível por 2^3.

Observando esse padrão, podemos supor que ele se repete para potências de 2 com expoente maior. Dessa forma, é possível formular a seguinte

> **Generalização:** Um número natural N é divisível por 2^p se o número formado pelos últimos p algarismos de N for divisível por 2^p.

Observe que essa generalização **precisa ser justificada**. Uma vez provada a sua validade, estarão também demonstrados os critérios que exibimos antes.

Veremos mais adiante como justificar essa generalização. Por enquanto, vamos checar a validade do critério no caso $p = 4$.

Exemplo 4. *Considere o número natural* $N = 234828432$*. Vamos verificar se* N *é divisível por* 16*. Os* 4 *últimos algarismos de* N *formam o número* $8432 = 16 \cdot 527$*, divisível por* 16*. Assim, confiando na validade do critério, afirmamos que* N *é divisível por* 16*.*

Claro que podemos verificar esse fato diretamente, dividindo N *por* 16 *e obtendo* $N = 16 \cdot 14676777$*. A vantagem do critério é que reduzimos o cálculo a uma divisão onde o dividendo tem, no máximo,* 4 *algarismos. Para números muito grandes isso pode fazer uma diferença significativa no esforço a ser despendido nesse cálculo.*

Observação 5. *Vale ressaltar que os critérios exibidos acima não só apontam quando um número é divisível por uma potência de* 2*, como também determinam o resto da divisão por essa potência de* 2*.*

Por exemplo, o número 222222 não é divisível por 4 pois 22 não é divisível por 4. Além disso, como 22 deixa resto 2 quando dividido por 4, 222222 também deixa resto 2 quando dividido por 4. Da mesma forma, 222222 deixa resto 6 quando dividido por 8, pois esse é o resto que 222 deixa quando dividido por 8.

2 Critério de divisibilidade por 3 e por 9

Vamos ao critério de divisibilidade por 3:

> Um número N é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for um número divisível por 3.

Note que o critério de divisibilidade por 3 não leva em consideração apenas os algarismos finais do número N, e sim todos os algarismos do número.

Exemplos 6. *O número* 123 *é divisível por* 3*, pois* $1+2+3=6$ *é divisível por* 3*. O número* 423712 *não é divisível por* 3*, pois* $4+2+3+7+1+2=19$ *não é divisível por* 3.

Observação 7. *Assim como ressaltamos na observação 5, o critério de divisibilidade por* 3 *também determina o resto da divisão de um número por* 3.

Assim, no exemplo 6 o número 423712 não é divisível por 3 e o resto da divisão desse número por 3 coincide com o resto da divisão de 19 por 3, que é 1. Note que $1+9=10$, que também deixa resto 1 quando dividido por 3. Em geral, podemos afirmar que *um número deixa o mesmo resto que a soma de seus algarismos quando dividido por* 3.

Análogo ao critério de divisibilidade por 3 é o critério de divisibilidade por 9:

> Um número N é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for um número divisível por 9.

De um modo mais geral, podemos afirmar que *um número deixa o mesmo resto que a soma de seus algarismos quando dividido por* 9.

Exemplo 8. *O número* 18135 *é divisível por* 9*, pois* $1+8+1+3+5=18$ *é divisível por* 9.

Exemplo 9. *Vamos testar a divisibilidade por* 9 *de um número grande:*

$$N = 4557216050676.$$

A soma dos algarismos desse número é

$$4+5+5+7+2+1+6+0+5+0+6+7+6=54$$

e 54 *é um múltiplo de* 9*, logo* N *é múltiplo de* 9*. Veja que poderíamos ter repetido o primeiro passo para o resultado da soma, obtendo* $5+4=9$.

Observação 10. *Quando estudamos os critérios de divisibilidade por* $2, 4$ *e* 8*, vimos que é possível generalizar os critérios, obtendo-se um critério para potências de* 2*. Isso não funciona no caso das potências de* 3*. Um aspecto importante dos números* 3 *e* 9 *é que as potências de* 10 *deixam resto* 1 *quando divididas por* 3 *ou por* 9*. Como veremos mais adiante, isso é fundamental para o funcionamento do critério e não ocorre no caso da divisão de uma potência de* 10 *por* 27.

3 Critério de divisibilidade por potências de 5

O critério de divisibilidade por 5 é muito simples:

> Um número é divisível por 5 se seu algarismo das unidades é 0 ou 5.

Exemplos 11. *O número* 2015 *é divisível por* 5 *pois termina em* 5*. O número* 314570 *é divisível por* 5 *pois termina em* 0.

Para a divisibilidade por 25 devemos verificar os dois últimos algarismos do número.

> Um número N é divisível por 25 se o número formado pelos algarismos das dezenas e das unidades de N é divisível por 25, ou seja, é um dos seguintes números é $00, 25, 50$ ou 75.

Exemplo 12. *Os números* $2025, 117175, 14650$ *e* 80100 *são todos divisíveis por* 25*, pelo critério acima. Os números* $121314, 25026, 10001$ *e* 23461 *não são divisíveis por* 25.

Para $125 = 5^3$, temos um critério similar:

> Um número N é divisível por 125 se o número formado pelos algarismos das centenas, das dezenas e das unidades de N é divisível por 125.

Exemplo 13. *Os números*

$$20000, 10125, 122250, 200375, 118500, 1437625, 1444750$$

e 23875 *são todos divisíveis por* 125*, pois os números formados pelos seus três últimos algarismos são, respecivamente,* $0, 125, 250, 375, 500, 625, 750$ *e* 875*, todos divisíveis por* 125.

Assim como no caso das potências de 2, há aqui um padrão que pode ser generalizado:

> **Generalização:** Um número natural N é divisível por 5^p se o número formado pelos últimos p algarismos de N for divisível por 5^p.

Observação 14. *O critério genneralizado acima é similar ao critério que obtivemos para potências de* 2*. Isso não é coincidência. Explicaremos mas adiante que isso é consequência da igualdade* $10 = 2 \cdot 5$.

4 Citérios de divisibilidade por 7 e 11

Para a divisibilidade por 7 temos dois critérios. O primeiro requer algumas explicações preliminares.

A posição de cada algarismo de um número, contada a partir da direita, é chamada **ordem** do algarismo. Assim, em um número, o algarismo das unidades é de primeira ordem, o das dezenas é de segunda ordem, o das centenas é de terceira ordem, assim por diante. Por exemplo, no número $N = 23437$ as ordens são as seguintes:

$$\begin{array}{rccccc} & 5^a & 4^a & 3^a & 2^a & 1^a \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N = & 2 & 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}$$

O algarismo 3 ocupa no número N duas ordens diferentes: 2^a e 4^a.

Cada grupo de três ordens de um número, contadas a partir da direita, forma uma **classe**. A primeira classe é formada pelas três primeiras ordens: unidades, dezenas e centenas. A segunda classe é formada pelas três ordens seguintes: unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar. A terceira classe é formada pelas ordens, da sétima à nona: unidades de milhão, dezenas de milhão e centenas de milhão, e assim sucessivamente.

Dessa forma, cada classe possui três ordens. Vejamos, por exemplo, o número $N = 214356728913$.

$$N = \overbrace{214}^{4^a}\overbrace{356}^{3^a}\overbrace{728}^{2^a}\overbrace{913}^{1^a}$$

No número N acima, o algarismo 7 é de sexta ordem e segunda classe.

Vamos chamar de **número da classe** o número formado pelos três algarismos de uma mesma classe. Para o número N acima, os números da $1^a, 2^a, 3^a$ e 4^a classes são, respectivamente, $913, 728, 356$ e 214.

Finalmente, vamos denotar por S_{ci} a soma dos números das classes ímpares e por S_{cp} a soma nos números das classes pares de um dado número. Por exemplo, para o número $N = 214356728913$, $S_{ci} = 913 + 356 = 1269$ e $S_{cp} = 728 + 214 = 942$.

Com essa preparação, podemos escrever nosso primeiro critério de divisibilidade por 7:

> Um número natural N é divisível por 7 quando a diferença não negativa entre a soma dos números das classes ímpares (S_{ci}) e a soma dos números das classes pares (S_{cp}) é um número divisível por 7.

Observação 15. *De modo mais geral, podemos dizer que N deixa o mesmo resto que $S_{ci} - S_{cp}$ quando dividido por 7.*

Exemplo 16. *Para o número $N = 214356728913$, temos $S_{ci} = 1269$ e $S_{cp} = 942$. Logo, $S_{ci} - S_{cp} = 1269 - 942 = 327$. Como o número $327 = 7 \cdot 46 + 5$ deixa resto 5 quando dividido por 7, o número N também deixa resto 5 quando dividido por 7.*

Para esclarecer o que significa a expressão "diferença não negativa", vamos examinar o seguinte

Exemplo 17. *Para o número $N = 514045$, $S_{ci} = 45$ e $S_{cp} = 514$. Neste caso, para que a difereça $S_{ci} - S_{cp}$ não seja negativa, devemos somar um múltiplo de 7 suficientemente grande de modo a que o resultado*

$$7q + S_{ci} - S_{cp} \tag{1}$$

seja positivo. Como a pergunta que queremos responder diz respeito à divisibilidade por 7, somar um múltiplo de 7 à diferença $S_{ci} - S_{cp}$ não altera a resposta. Qualquer múltiplo de 7 que torne a expressão (1) positiva serve, mas é aconselhável escolher a menor parcela $7q$ possível. No nosso exemplo, $q = 70$ fornece $7q = 490$ e $7q + S_{ci} - S_{cp} = 490 + 45 - 514 = 535 - 514 = 21$, que é um múltiplo de 7. Portanto, $N = 514045$ é divisível por 7.

Há um segundo critério para a divisibilidade por 7.

> Dado um número natural N, considere $N = 10b + a$, onde a é o algarismo das unidades de N. Se $b - 2a$ é divisível por 7, então N é divisível por 7.

Exemplo 18. *Para decidir se o número $N = 86415$ é divisível por 7, devemos aplicar o critério acima várias vezes:*

$$86415 \to 8641 - 2 \cdot 5 = 8631,$$

$$8631 \to 863 - 2 \cdot 1 = 861,$$

$$861 \to 86 - 2 \cdot 1 = 84,$$

$$84 \to 8 - 2 \cdot 4 = 0.$$

Usando o critério, temos:

$$0 \textit{ é múltiplo de } 7 \Rightarrow 84 \textit{ é múltiplo de } 7,$$

$$84 \textit{ é múltiplo de } 7 \Rightarrow 861 \textit{ é múltiplo de } 7,$$

$$861 \textit{ é múltiplo de } 7 \Rightarrow 8631 \textit{ é múltiplo de } 7,$$

$$8631 \textit{ é múltiplo de } 7 \Rightarrow 86415 \textit{ é múltiplo de } 7.$$

Observação 19. *Note que $N = 10b + a$ pode ser divisível por 7 sem que $b - a$ seja divisível por 7. Por exemplo, se $N = 21 = 7 \cdot 3$, então $b = 2$, $a = 1$ e $b - a = 1$ não é divisível por 7. Isso indica que o critério acima não pode ser usado para encontrar o resto da divisão de um númmero por 7.*

Finalmente, vamos estabelecer um critério para a divisibilidade por 11.

> Um número natural N é divisível por 11 quando a diferença não negativa entre a soma dos algarismos de ordem ímpar (S_{oi}) e a soma dos algarismos de ordem par (S_{op}) for um número divisível por 11.

Observação 20. *De modo mais geral, podemos dizer que N deixa o mesmo resto que $S_{oi} - S_{op}$ quando dividido por* 11.

Exemplo 21. *Considere o número $N = 3767632$. Temos*

$$\begin{array}{cccccccc} & 7^a & 6^a & 5^a & 4^a & 3^a & 2^a & 1^a \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N = & 3 & 7 & 6 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

Assim, $S_{oi} = 2+6+6+3 = 17$ e $S_{op} = 3+7+7 = 17$. Como $S_{oi} - S_{op} = 17-17 = 0$ é divisível por 11*, o número N é divisível por* 11.

Aqui, o significado de "diferença não negativa" é semelhante ao que aperece no primeiro critério de divisibilidade por 7, como esclarece o próximo exemplo.

Exemplo 22. *Para $N = 17183738465$, $S_{oi} = 5+4+3+3+1+1 = 17$ e $S_{op} = 6+8+7+8+7 = 36$. A diferença $S_{oi} - S_{op}$ é negativa. O argumento do exemplo* 17 *pode ser repetido aqui: somamos um múltiplo suficientemente grande de* 11 *de modo que*

$$11q + S_{oi} - S_{op} \tag{2}$$

seja positivo. Escolhendo $11q = 22$, obtemos $11q + S_{oi} - S_{op} = 22 + 17 - 36 = 3$. Dessa forma, N não é divisível por 11 *e deixa resto* 3 *quando dividido por* 11.

Observe que a escolha de $11q$ é irrelevante para a determinação do resto. Se, por exemplo, $11q = 33$, então $11q+S_{oi}-S_{op} = 33+17-36 = 14$, que deixa resto 3 *quando dividido por* 11*. Veja ainda que, para* 14*, $S_{oi} - S_{op} = 4-1 = 3$, exatamente o resto que já tínhamos encontrado.*

5 Por que os critérios funcionam?

Vamos começar com uma observação importante.

Observação 23. *A soma de números divisíveis por um número natural n também é divisível por n.*

Por exemplo, a soma de números pares é um número par, porque é possível colocar 2 "em evidência" na soma. A soma de múltiplos de 3 é um múltiplo de 3 porque é possível colocar 3 "em evidência" na soma. O mesmo vale para qualquer soma de múltiplos de um número natural n.

Com essa observação em mãos, vamos olhar mais de perto os critérios de divisibilidade.

Divisibilidade por potências de 2 e de 5: como $10 = 2 \cdot 5$, temos que $10^p = 2^p \cdot 5^p$. Dado um número natural N, seja b o número formado pelos seus últimos p algarismos. Então $N = 10^p + b$. Como 10^p é divisível por 2^p e por 5^p. Se b for divisível por 2^p então N também é divisível por 2^p, e se b for divisível por 5^p, então N também é divisível por 5^p.

Mais ainda, se o resto da divisão de b por 2^p for r, então é possível escrever $b = 2^p q + r$, logo $N = 10^p a + b = 10^p a + 2^p q + r$, ou seja, $N = 2^p(5^p a + q) + r$ o que significa que o resto da divisão de N por 2^p é r.

Da mesma forma, é possível justificar que o resto da divisão de N por 5^p coincide com o resto da divisão de b por 5^p.

Observação 24. *$123475 = 123400 + 75 = 1234 \cdot 100 + 75 = 1234 \cdot 4 \cdot 25 + 75$. Como $75 = 25 \cdot 3$, temos que $123475 = (1234 \cdot 4 + 3) \cdot 25$ é múltiplo de* 25*. Em relação à divisibilidade por* 4*, $123475 = 1234 \cdot 4 \cdot 25 + 72 + 3 = 4 \cdot (1234 \cdot 25 + 18) + 3$. Logo,* 123475 *deixa resto* 3 *quando dividido por* 4.

Divisibilidade por 3 e por 9: os números $9, 99, 999, 9999$, etc., são todos divisíveis por 3 e por 9. Se N é um número de dois algarismos, é possível escrevê-lo como $N = 10b + a$, onde a é o algarismo das unidades e b é o algarismo das dezenas. Por exemplo: $37 = 10 \cdot 3 + 7$. Da mesma forma, se N tem três algarismos, podemos escrevê-lo como $N = 100c + 10b + a$. Por exemplo: $753 = 100 \cdot 7 + 10 \cdot 5 + 3$. Se N tem quatro algarismos, então $N = 1000d + 100c + 10b + a$, e assim por diante.

Um número natural $N = 1000d + 100c + 10b + a$ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} N &= (999+1)d + (99+1)c + (9+1)b + a = \\ &= \underbrace{999d + 99c + 9b}_{\text{divisível por 3 e por 9}} + (d+c+b+a). \end{aligned} \tag{3}$$

Como as três primeiras parcelas em (3) são divisíveis por 3 e por 9, pela observação 23 a soma $999d + 99c + 9b$ é divisível por 3 e por 9. Desse modo, o número N é divisível por 3 ou por 9 se $d + c + b + a$ (a soma de seus algarismos) for divisível por 3 ou por 9, respectivamente.

Se a soma dos algarismos deixa resto r quando dividida por 3, então $d+c+b+a = 3q+r$ e $N = 999d+99c+9b+3q+r = 3(333d + 33c + 3b + q) + r$ deixa resto r quando dividido por r. O mesmo vale em relação à divisão por 9.

Veja que não há nada de especial com o fato de N ter 4 algarismos. O mesmo argumento vale para um número de dois, três ou mais de quatro algarismos.

Exemplo 25. 123123 *é múltiplo de* 3*, pois $123123 = 100000 + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 100 + 2 \cdot 10 + 3 = 99999 + 2 \cdot 9999 + 3 \cdot 999 + 99 + 2 \cdot 9 + (\overbrace{1+2+3+1+2+3}^{=12})$. Mas* 123123 *não é múltiplo de* 9 *pois* 12 *dividido por* 9 *deixa resto* 3.

Divisibilidade por 7: os números

$$1\overbrace{00}^{2}1 = 7 \cdot 143,$$

$$1\overbrace{00000000}^{8}1 = 7 \cdot 142857143,$$

$$1\overbrace{00\cdots00}^{14}1 = 7 \cdot 142857142857143,$$

$$1\overbrace{00\cdots00}^{20}1 = 7 \cdot 142857142857142857143,$$

etc., são todos múltiplos de 7 (a quantidade de zeros aumenta de 6 em 6). Os números

$$\overbrace{999999}^{6} = 7 \cdot 142857,$$

$$\overbrace{999999999999}^{12} = 7 \cdot 142857142857,$$

$$\overbrace{999999999999999999}^{18} = 7 \cdot 142857142857142857,$$

etc,, são todos múltiplos de 7 (a quantidade de noves aumenta de 6 em 6). Observe que o padrão 142857 que se repete nos quocientes dessas divisões é exatamente o mesmo que aparece na representação decimal de 1/7:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots$$

Com essas informações, vamos reexaminar o exemplo 16:

$$N = 214356728913 =$$

$$= 214 \cdot 1000000000 + 356 \cdot 1000000 + 728 \cdot 1000 + 913 =$$
$$= 214 \cdot (1000000001 - 1) + 356 \cdot (999999 + 1) +$$
$$+ 728 \cdot (1001 - 1) + 913 =$$
$$214 \cdot 1000000001 + 356 \cdot 999999 + 728 \cdot 1001 +$$
$$+ (\underbrace{913 + 356}_{S_{ci}}) - (\underbrace{728 + 214}_{S_{cp}}).$$

A soma

$$214 \cdot 1\overbrace{00000000}^{8}1 + 356 \cdot \overbrace{999999}^{6} + 728 \cdot 1001$$

é divisível por 7. Assim, N deixa o mesmo resto que $(913 + 356) - (728 + 214) = S_{ci} - S_{cp}$ quando dividido por 7.

O mesmo argumento pode ser repetido para qualquer número e isso justifica o primeiro critério de divisibilidade por 7.

Para o segundo critério de divisibilidade por 7, note que

$$10b + a = 10(b - 2a) + 21a.$$

Como $21a$ é divisível por 7, se $b - 2a$ é divisível por 7, então $10b + a$ é divisível por 7, pela observação 23.

Divisibilidade por 11: neeste caso, repetiremos o que foi feito para justificar o primeiro critério de divisibilidade por 7, só que aqui a situação é mais simples. Primeiro, observemos que

$$11 \cdot 1 = 11 = 10 + 1,$$

$$11 \cdot 9 = 99 = 100 - 1,$$

$$11 \cdot 91 = 1001 = 1000 + 1,$$

$$11 \cdot 909 = 9999 = 10000 - 1,$$

$$11 \cdot 9091 = 100001 = 100000 + 1,$$

$$11 \cdot 90909 = 999999 = 1000000 - 1,$$

etc., de modo que toda potência de 10 é um múltiplo de 11 mais 1 ou menos 1. Diante disso podemos justificar o critério de divisibilidade por 11 observando o exemplo a seguir.

Exemplo 26. *Podemos escrever o número $N = 243815$ como*

$$N = 2 \cdot 100000 + 4 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 10 + 5 =$$

$$= 2 \cdot (11 \cdot 9091 - 1) + 4 \cdot (11 \cdot 909 + 1) + 3 \cdot (11 \cdot 91 - 1) +$$
$$+ 8 \cdot (11 \cdot 9 + 1) + (11 - 1) + 5 =$$

$$= 11 \cdot (2 \cdot 9091 + 4 \cdot 909 + 3 \cdot 91 + 9 \cdot 9 + 1) + (\underbrace{5 + 8 + 4}_{S_{oi}}) - (\underbrace{1 + 3 + 2}_{S_{op}}).$$

Assim, quando dividido porr 11, N deixa o mesmo resto que $S_{oi} - S_{op} = 17 - 6 = 11$, ou seja, N é divisível por 11.

O mesmo argumento pode ser repetido para qualquer número e isso justifica o critério de divisibilidade por 11.

6 Números compostos

Os critérios exibidos nas seções anteirores tratam da divisibilidade por primos ou por potências de primos. A partir desses critérios, podemos obter critérios para números compostos que sejam obtidos como produto de primos distintos. O fato fundamental é o seguinte.

Observação 27. *Se a e b são dois números naturais primos entre si, então um número natural N é divisível por $a \cdot b$ se, e somente se, é divisível por a e por b.*

Lembremos que, como visto na aula sobre divisibilidade, dois números naturais são ditos primos entre si se o maior divisor comum entre eles for igual a 1.

Vamos ilustrar a observação 27 com alguns exemplos.

Exemplo 28. *Um número N é divisível por 10 quando for divisível por 2 e por 5 ao mesmo tempo. Isto significa que N deve ser par e terminar em 0 ou 5. Como um número terminado em 5 é ímpar, podemos concluir que um número é divisível por 10 quando termina em 0.*

Exemplo 29. *Um número N é divisível por 12 quando for divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo. Note que, embora seja possível escrever $12 = 2 \cdot 6$, não podemos dizer que um número é divisível por 12 se for divisível por 2 e por 6 ao mesmo tempo. Por exemplo, 18 é divisível por 2 e por 6 simultaneamente, mas não é divisível por 12. Isso se dá porque 2 e 6 não são primos entre si.*

Exemplo 30. *Um número N é divisível por 77 quando for divisível por 7 e por 11. Por exemplo, para $N = 959112$ temos: $S_{oi} - S_{op} = (2+1+5) - (1+9+9) = 8 - 19$. Substituíndo $S_{oi} - S_{op}$ por $11q + S_{oi} - S_{op}$ não há prejuízo para a verificação da divisibilidade por 11. Escolhendo $q = 1$, obtemos $11 + S_{oi} - S_{op} = 11 + 8 - 19 = 0$, que é divisível por 11, o que significa que N é divisível por 11. Para esse mesmo número temos $S_{ci} - S_{cp} = 112 - 959$. Substituíndo $S_{ci} - S_{cp}$ por $7q + S_{ci} - S_{cp}$ não há prejuízo para a verificação da divisibilidade por 7. Escolhendo $q = 130$, obtemos $7q + S_{ci} - S_{cp} = 910 + 112 - 959 = 1022 - 959 = 63 = 7 \cdot 9$. Logo $N = 959112$ também é divisível por 7. Portanto, $N = 959112$, sendo divisível por 11 e por 7, é divisível por 77.*

Dicas para o Professor

As três primeiras seções podem ser vistas em duas aulas de 50 minutos cada. Os critérios de divisibilidade por 7 e por 11 requerem um maior cuidado. Assim, uma aula de 50 minutos deve ser reservada para a seção 4. As seções 5 e 6 devem ocupar uma aula de 50 minutos, ou até duas, se houver disponibilidade de tempo, sendo que uma parte maior desse tempo deve ser reservada para a seção 5.

É importante que o aluno entenda porque os critérios funcionam e não apenas use-os como regras decoradas. Levando isso em consideração, a seção 5 é a mais importante da aula pois é nela que é explicado o funcionamento dos critérios.

Sugestões de Leitura Complementar

1. J.P. de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, Editora IMPA, 1998.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo, Nobel, 1989.