Material Teórico - Módulo de Geometria das Transformações Lineares

Vetores no Plano - Parte I

Tópicos Adicionais

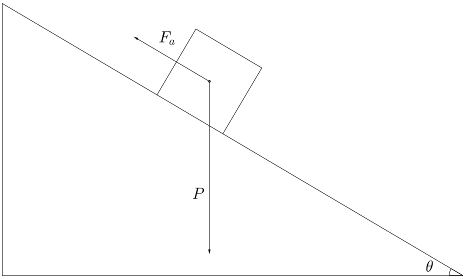
Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Agosto de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

A nossa primeira experiência com vetores ocorre, geralmente, num curso de Física. Para efeito de ilustração, considere um bloco de massa 1 kg em repouso numa rampa inclinada. Pede-se a intensidade da força de atrito entre o bloco e a rampa.



Forças são grandezas vetoriais que, como sabemos, são representadas por setas, ou melhor, *segmentos orientados*. Um caminho para resolver o problema acima é calcular a *soma* das forças de atrito F_a e peso P agindo no bloco. Essa força resultante, estando o bloco em repouso, deve ser representada por um segmento orientado na direção perpendicular à superfície da rampa.

A análise para um bloco de massa m qualquer é a mesma. Agora, as novas forças F_a e P são as anteriores *multiplicadas* pelo escalar m. Nesse caso mais geral, justificaremos adiante a resposta $mg \operatorname{sen} \theta$ N (Newtons) dessa questão, em que θ é o ângulo de inclinação da rampa e g é a (medida) da aceleração da gravidade.

Interessa-nos, nesse momento, formalizar matematicamente os seguintes pontos da discussão acima:

1. Um vetor é representado por um segmento de reta orientado.

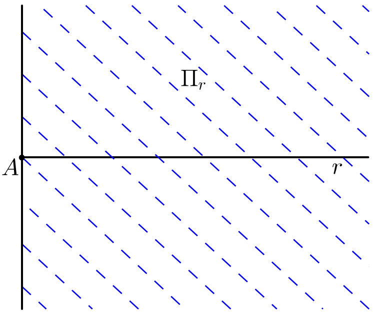
2. Existe uma operação de adição de vetores.

3. Vetores podem ser multiplicados por números reais.

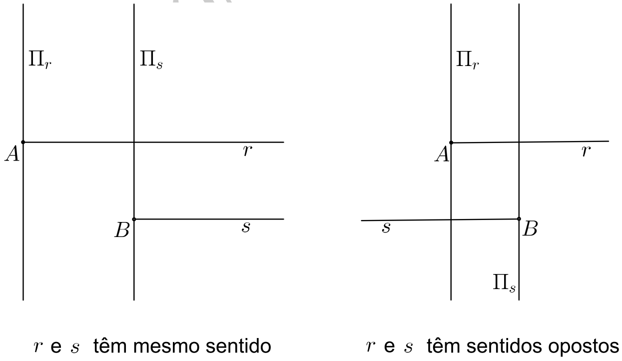
2 Vetores no Plano

2.1 Definindo Vetores

Fixemos um plano Π, nosso conjunto universo. Dada uma semirreta r de origem A, seja Π_r o semiplano contendo r e cuja origem é a reta perpendicular a r passando por A. Duas



semirretas r e s tem mesma *direção* quando as suas retas suportes coincidem ou são paralelas. Nesse caso, dizemos que r e s tem *mesmo sentido* se $\Pi_r \subset \Pi_s$ ou $\Pi_s \subset \Pi_r$. Caso contrário, diz-se que r e s tem *sentidos opostos*.



Observação 1. *Caso r e s sejam semirretas de uma certa reta, não é difícil verificar que $\Pi_r \subset \Pi_s$ equivale a $r \subset s$. Nessas hipóteses, segue da definição que r e s tem mesmo sentido se, e só se, $r \subset s$ ou $s \subset r$.*

O próximo lema, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor, é uma versão unidimensional da Proposição (3).

Lema 2. *Sejam a_1, a_2 e a_3 semirretas de uma mesma reta. Se $a_1, a_2 \subset a_3$ ou $a_1, a_2 \supset a_3$, então $a_1 \subset a_2$ ou $a_2 \subset a_1$.*

Proposição 3. *Sejam Π_1, Π_2 e Π_3 semiplanos. Se $\Pi_1, \Pi_2 \subset \Pi_3$ ou $\Pi_1, \Pi_2 \supset \Pi_3$, então $\Pi_1 \subset \Pi_2$ ou $\Pi_2 \subset \Pi_1$.*

Demonstração. Em qualquer uma das hipóteses, as retas origens dos semiplanos devem ser, duas a duas, coincidentes ou paralelas. Assim, seja a uma perpendicular comum às retas de origem dos semiplanos dados e defina as semirretas $a_i = a \cap \Pi_i, i = 1, 2, 3$. Então, vale $a_1, a_2 \subset a_3$ ou $a_1, a_2 \supset a_3$, de modo que $a_1 \subset a_2$ ou $a_2 \subset a_1$, pelo Lema (2). Terminamos, pois as inclusões anteriores equivalem a $\Pi_1 \subset \Pi_2$ e $\Pi_2 \subset \Pi_1$, respectivamente (vide Observação (1)). □

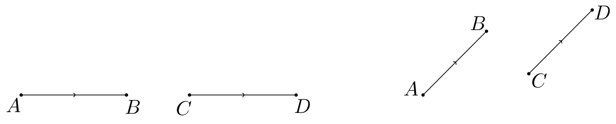
Proposição 4. *Sejam r, s e t semirretas. Se r e s têm mesmo sentido e s e t têm mesmo sentido, então r e t também têm mesmo sentido.*

Demonstração. Com efeito, $\Pi_r \cap \Pi_t \supset (\Pi_r \cap \Pi_s) \cap (\Pi_s \cap \Pi_t)$, sendo $\Pi_r \cap \Pi_s$ e $\Pi_s \cap \Pi_t$ semiplanos contidos em Π_s. Pela Proposição (3), $(\Pi_r \cap \Pi_s) \cap (\Pi_s \cap \Pi_t)$ também é um semiplano, de onde vem $\Pi_r \subset \Pi_t$ ou $\Pi_t \subset \Pi_r$, pela mesma proposição. □

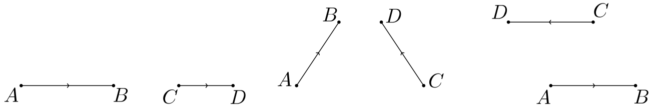
Dados pontos A e B, denotaremos por AB o segmento de reta orientado de A para B. Assim, BA é o mesmo segmento, mas com a orientação oposta, de B para A.

Dois segmentos de reta orientados AB e CD são ditos *equipolentes* quando possuírem mesmos comprimento, direção e sentido (veja as figuras a seguir). Escreveremos $AB \equiv CD$ para indicar que tais segmentos são equipolentes.

AB e CD são equipolentes



AB e CD não são equipolentes



Vamos explicar essa definição. Em geral, dois segmentos orientados AB e CD tem mesma direção caso as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ coincidam ou sejam paralelas. E, nesse caso, dizemos que AB e CD possuem mesmo sentido (resp. sentidos opostos) se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm mesmo sentido (resp. sentidos opostos). Naturalmente, AB e CD possuem sentidos opostos se, e só se, AB e DC possuem mesmo sentido.

Exemplo 5. *Se M é o ponto médio do segmento AB, então $AM \equiv MB$.*

Proposição 6. *Equipolência é uma relação de equivalência. Em outras palavras, se AB, CD e EF são segmentos orientados, então:*

i) $AB \equiv AB$ *(reflexividade).*

ii) $AB \equiv CD \Rightarrow CD \equiv AB$ *(simetria).*

iii) $AB \equiv CD, CD \equiv EF \Rightarrow AB \equiv EF$ *(transitividade).*

Demonstração. A reflexividade e a simetria são imediatas, enquanto que a transitividade segue da Proposição (4). □

Denotaremos por $\overrightarrow{AB}$ a *classe de equipolência* do segmento orientado AB, isto é, $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de *todos* os segmentos orientados equipolentes a AB. Pela proposição anterior, o conjunto dos segmentos orientados no plano fica particionado em classes de equipolência, cada uma das quais chamamos de *vetor*. Isso merece registro.

Definição 7. *Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados.*

Assim, cada segmento orientado *representa* um único vetor, a saber, a sua classe de equipolência. Além disso, dois segmentos orientados representam o mesmo vetor se, e só se, são equipolentes. Em símbolos:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB \equiv CD.$$

Como ilustração, nas notações do Exemplo (5), vale $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Será conveniente considerar o *vetor nulo*, 0, representado por qualquer segmento *degenerado* AA.

Observe que quando uma certa noção associada a segmentos orientados for invariante em cada classe de equipolência, ela induzirá uma noção similar, agora relativa a vetores. Por exemplo, podemos definir o *módulo* de um vetor v, $||v||$, como o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente. E faz sentido falar em dois vetores de mesma direção ou mesmo sentido. Também podemos considerar o ângulo $\theta(u,v)$, entre dois vetores não-nulos u e v, escrevendo $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}$ e definindo $\theta(u,v) = B\widehat{A}C$.

Tendo definido vetores, vamos denotar por V o conjunto de todos os vetores no plano. Desejamos definir uma adição em V e uma multiplicação por escalar. Nessa direção, desenvolveremos, a seguir, alguns resultados úteis.

A demonstração do próximo teorema pode ser omitida numa primeira leitura.

Teorema 8. *Se os segmentos AB e CD são não colineares, tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e só se, $ABDC$ é um paralelogramo.*

Demonstração. Se $ABDC$ é um paralelogramo, AB e CD já possuem mesmo comprimento e direção. Então, resta provar que AB e CD possuem mesmo sentido para concluir a equipolência $AB \equiv CD$. Sejam r a semirreta de origem A passando por B e s a semirreta de origem C passando por D. Como $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, todos os pontos de s estão de um mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Nesse mesmo lado, seja t a semirreta que parte A contida na origem de Π_r.

Suponhamos, inicialmente, $B\widehat{A}C \leq 90°$, de modo que $C \in \Pi_r$. Daí,

$$r \text{ e } t \text{ estão em lados opostos da reta } \overleftrightarrow{AC}. \tag{1}$$

Vamos mostrar que $s \subset \Pi_r$, de onde seguirá a inclusão $\Pi_s \subset \Pi_r$. Se, por contradição, existe um ponto E na semirreta s, com E fora do semiplano Π_r, temos a

Afirmação: E e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Pois t corta EB num ponto F, digamos. Por (1), a reta $\overleftrightarrow{AC}$ deve cortar o segmento FB e, com maior razão, também corta o segmento EB.

Afirmação validada, note que D e E estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$, uma vez que $DE \cap \overleftrightarrow{AC} = \varnothing$. Portanto, B e D estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, o que nos garante que $BD \cap \overleftrightarrow{AC} \neq \varnothing$, uma contradição com a hipótese $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$.

Da inclusão $\Pi_s \subset \Pi_r$ segue que AB e CD tem mesmo sentido, de forma que $AB \equiv CD$.

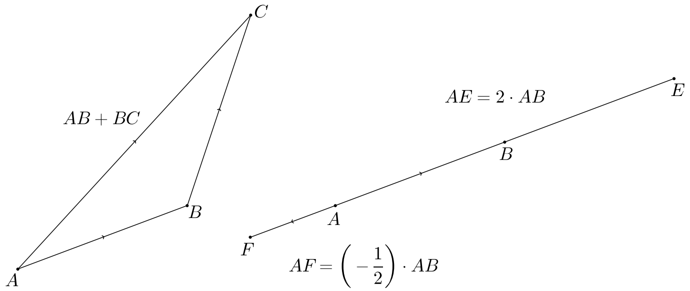
Agora, se fosse $B\widehat{A}C > 90°$, teríamos $A\widehat{B}D < 90°$ o que, pelo argumento anterior, nos levaria a $BA \equiv DC$, que equivale a $AB \equiv CD$.

Reciprocamente, suponhamos $AB \equiv CD$ com AB e CD não colineares. Se a paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ pelo ponto B corta a reta $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto D', então $ABD'C$ é um paralelogramo. Pela parte já demonstrada, $CD' \equiv AB$; por transitividade, $CD' \equiv CD$, de onde segue $D' = D$, ou seja, $ABDC$ é um paralelogramo. $\square$

Corolário 9. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Podemos somar dois segmentos orientados tais que a extremidade de um é a origem do outro. Mais precisamente, definimos $AB + BC = AC$.

A multiplicação do segmento orientado AB pelo número real k, denotada $k \cdot AB$, é o segmento orientado com origem A, comprimento igual a $|k|\overline{AB}$ e mesma direção que AB, tando mesmo sentido que AB caso $k > 0$ e sentido oposto ao de AB caso $k < 0$ (veja a figura a seguir).



Observação 10. *É possível interpretar a definição anterior de modo que os casos $k = 0$ ou $A = B$ estejam contemplados. Basta utilizar as únicas duas informações que fazem sentido, quais sejam, $k \cdot AB$ tem origem A e comprimento $|k|\overline{AB} = 0$. Assim, $k \cdot AB = AA$, nesses casos.*

As "operações" acima definidas induzem operações com vetores devido ao seguinte resultado.

Proposição 11. *Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ e k é um número real, então:*

i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

ii) $\overrightarrow{k \cdot AB} = \overrightarrow{k \cdot A'B'}$.

Demonstração. Para o item i), basta utilizar o corolário acima (nos dois sentidos). De fato, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC} =$

$\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.
Quanto a ii), as definições nos dizem que $k \cdot AB$ e $k \cdot A'B'$ tem mesmo comprimento, direção e sentido. $\square$

Na 2ª parte dessa aula, utilizaremos coordenadas para representar vetores e expressar as operações de adição e multiplicação por escalar. Aproveitamos para recordar brevemente como podemos introduzir *coordenadas numa reta*, se nela fixamos um segmento orientado.

Cada ponto $X \in \overleftrightarrow{AB}$ determina um único número real x, a *coordenada* de X, satisfazendo $AX = x \cdot AB$. A correspondência $X \mapsto x$ define uma bijeção entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, valendo $\overline{XY} = \overline{AB}|x - y|$, quaisquer que sejam os pontos X e Y em $\overleftrightarrow{AB}$ de coordenadas x e y, respectivamente (o *axioma da régua infinita*: cf. [3]). Em particular, o ponto médio do segmento XY tem coordenada $(x + y)/2$ (veja, também, as primeiras páginas da referência [2]).

Exemplo 12. *Se $AC = k \cdot AB$ e $CD \equiv l \cdot AB$, mostre que $AD = (k + l) \cdot AB$.*

Solução. Podemos supor $A \neq B$ e, como explicado acima, introduzir coordenadas na reta $\overleftrightarrow{AB}$. Dessa forma, se d é a coordenada do ponto D, queremos mostrar que $d = k + l$. Ora, k é a coordenada do ponto C; se o ponto E satisfaz $AE \equiv CD$, então $AE = l \cdot AB$ e l é a coordenada de E. Como os segmentos AD e EC tem o mesmo ponto médio, vem

$$\frac{0 + d}{2} = \frac{k + l}{2},$$

e o resultado segue. $\square$

2.2 Operações

As duas operações com vetores que precisamos introduzir estão definidas a seguir:

Adição: dados os vetores $u, v \in V$, escreva $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{BC}$ e defina o vetor *soma* $u + v$ de u e v como $u + v = \overrightarrow{AC}$.

Multiplicação por Escalar: dados o vetor $v \in V$ e o número real k, escreva $v = \overrightarrow{AB}$ e defina $k \cdot v$, o *produto do escalar k pelo vetor v*, como o vetor $k \cdot v = \overrightarrow{k \cdot AB}$.

Segue da Proposição (11) que as operações acima estão bem definidas, ou seja, $u+v$ e $k \cdot v$ não dependem das escolhas particulares dos segmentos orientados representando u e v.

Deixamos como exercício para o leitor a tarefa de verificar que $k \cdot v = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ou $v = 0$.

Observação 13. *Note que dois vetores u e v, com $u \neq 0$, têm mesma direção se, e somente se, $v = k \cdot u$ para algum escalar k. Dizemos, nesse último caso, que v é um* múltiplo *de u.*

Vejamos algumas propriedades das operações acima definidas . Sejam $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{BC}, w = \overrightarrow{CD}$ vetores quaisquer no plano e k, l números reais.

1) *Associatividade da adição*:

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

Pois ambos os membros dessa igualdade resultam em $\overrightarrow{AD}$.

2) *Associatividade da multiplicação por escalar*:

$$k \cdot (l \cdot u) = (kl) \cdot u.$$

Ambos os membros tem mesmo comprimento, direção e sentido.

3) *Elementos neutros*:

$$v + 0 = 0 + v = v,$$
$$1 \cdot v = v.$$

4) *Vetor oposto: dado $v \in V$ qualquer, existe um vetor, denotado por $-v$ e chamado* oposto *de v, que somado a v*

resulta em 0.

$$v + (-v) = (-v) + v = 0.$$

Basta tomar $-v = \overrightarrow{CB}$.

5) *Lei do cancelamento*:

$$u + w = v + w \Rightarrow u = v.$$

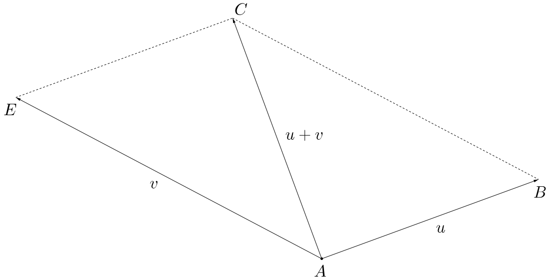
Vejamos: $u = (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) = v$. Em particular, o único vetor que somado a v resulta em 0 é $-v$ (unicidade do oposto). Daí, podemos definir a subtração de vetores: $u - v = u + (-v)$.

6) *1ª Distributividade*:

$$(k + l) \cdot u = k \cdot u + l \cdot u.$$

Nas notações do Exemplo (12), $k \cdot u + l \cdot u = \overrightarrow{k \cdot AB} + \overrightarrow{l \cdot AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = (k + l) \cdot u$.

7) *A Regra do Paralelogramo.* Se os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AE}$ tem direções distintas, então $u + v = \overrightarrow{AC}$, o vetor dado pela diagonal que sai de A no paralelogramo $ABCE$.



De fato, como $v = \overrightarrow{BC}$, vale $u + v = \overrightarrow{AC}$, por definição. A equipolência $AE \equiv BC$ nos garante que $ABCE$ é um paralelogramo.

Veja que a comutatividade da adição, próxima propriedade a se enunciar, fica estabelecida aqui no caso em que u e v tem direções diferentes.

Ainda em referência à figura acima, note que a outra diagonal EB representa o vetor diferença $u - v$.

8) *Comutatividade*:

$$u + v = v + u.$$

Sobrou o caso em que u e v tem mesma direção, $v = k \cdot u$, digamos. O leitor pode verificar, como um exercício instrutivo, que a conclusão segue da 1ª distributividade.

9) *2ª Distributividade*:

$$k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v.$$

Podemos admitir que u e v tem direções distintas (se não, recaímos na 1ª distributividade). Veja a figura acima. Se $v = \overrightarrow{AE}$, sejam B', C' e E' satisfazendo $k \cdot AB = AB', k \cdot AC = AC'$ e $k \cdot AE = AE'$. Pelo critério LAL, temos os seguintes pares de triângulos semelhantes: $(ABC, AB'C')$ e $(ACE, AC'E')$. Logo, $\overleftrightarrow{B'C'} // \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{C'E'} // \overleftrightarrow{CE}$. Conclui-se que $AB'C'E'$ é um paralelogramo, de modo que $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AE'}$, ou seja, $k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v$.

Observação 14. *Com as propriedades acima, vemos que uma parcela num membro de uma igualdade vetorial pode ser "levada" para o outro membro trocando-se o seu sinal. E um escalar não nulo multiplicando um dos membros "passa" para o outro dividindo-o. Por definição,* $\frac{v}{k} = \frac{1}{k} \cdot v, v \in V, k \in \mathbb{R}^*$. *Dessa forma, podemos manipular igualdades vetoriais num contexto familiar.*

Exemplo 15. *Fixe um ponto O no plano. Mostre que M é o ponto médio do segmento AB se, e só se,*

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Solução. Ora, M é ponto médio de AB se, e só se, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \\
&\Leftrightarrow -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).
\end{aligned}$$

□

Definição 16. *Um conjunto com uma operação de adição $(u,v) \mapsto u + v$ e uma multiplicação por escalar $(k,v) \mapsto k \cdot v$, em que as propriedades 1) - 4), 6), 8) e 9) listadas acima se verificam, chama-se um* espaço vetorial*.*

Por exemplo, além de V, o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$, com entradas reais, é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um número real. Também, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de números complexos por números reais. Como veremos, V e $\mathbb{C}$ são "iguais" enquanto espaços vetoriais.

Para o próximo exemplo, convém lembrar que as medianas de um triângulo se encontram num ponto, o *baricentro* do triângulo. Além disso, o baricentro divide cada mediana na razão $2 : 1$ (a partir de cada vértice).

Exemplo 17. *Seja G o baricentro de um triângulo ABC. Mostre que*

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0.$$

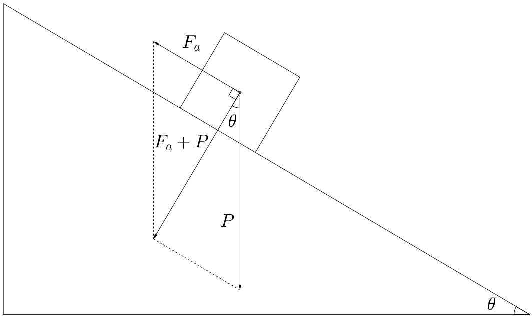
Solução. Seja M o ponto médio de AB. Como $\overrightarrow{CG} = 2\cdot\overrightarrow{GM}$ e $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM}$, temos $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CM}$. Do exemplo anterior, com $O = C$, vem $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Analogamente, vale $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ e $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. Assim,

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) = 0.$$

$\square$

Encerraremos essa primeira parte do nosso estudo resolvendo o problema enunciado na introdução.

Como observado anteriormente (acompanhe na figura a seguir), para que o bloco permaneça em repouso, a soma dos vetores F_a e P deve ter direção perpendicular à superfície do bloco. Logo, θ é o ângulo entre os vetores P e $F_a + P$. Pela regra do paralelogramo, segue que $\operatorname{sen}\theta = ||F_a||/||P||$. Sendo $||P|| = mg$, obtemos a resposta $||F_a|| = mg\operatorname{sen}\theta$ N.



Dicas para o Professor

As primeiras definições e os primeiros resultados do texto permitem comparar os *sentidos* de dois segmentos orientados (de mesma direção). Essa abordagem, entre outras coisas, nos possibilitou uma demonstração completa do Teorema (8), que nos apresenta a relação fundamental entre equipolência e paralelogramos. Apesar do valor do rigor, e caso o Professor já tenha tratado do assunto de vetores com a sua turma, pode ser conveniente adaptar o roteiro do texto para que melhor se adeque a uma revisão. De todo modo, uma vez compreendida a noção de vetor e exploradas as propriedades das operações com vetores, resta-nos a etapa essencial da apresentação de exemplos e exercícios. Encontramos vários deles, em diferentes níveis de dificuldade, nas referências [1] e [2].

Dessa forma, três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

2. E. L. Lima. *Coordenadas no Plano.* 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

3. J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana.* 11ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.