Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Cotangente, Cossecante e Secante
Parte 2

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

6 de Dezembro de 2024

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, apresentaremos os domínios e imagens das funções trigonométricas secante, cossecante e cotangente, assim como esboçaremos os gráficos das mesmas. Conforme veremos, para identificar os conjuntos imagens e esboçar os gráficos dessas funções, faremos uso do nosso conhecimento a respeito das funções cosseno, seno e tangente.

Domínio, imagem e gráfico da função secante

Aprendemos, nas aulas anteriores, que pode-se definir a secante de $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Desse modo, fazendo

$$D_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

podemos definir a **função secante** $\sec : D_1 \to \mathbb{R}$, que a cada x em D faz corresponder o valor $\sec x$. O conjunto D_1 é o domínio da função secante. Além disso, mostramos que para $x \in D$, tem-se $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$; portanto,

$$\begin{aligned} \sec(x+p) = \sec x &\iff \frac{1}{\cos(x+p)} = \frac{1}{\cos x} \\ &\iff \cos(x+p) = \cos x. \end{aligned}$$

Como a função cosseno tem período 2π, segue dos cálculos acima que a função secante também é periódica e o seu período também é igual a 2π.

Sabemos que a imagem da função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o intervalo fechado $[-1,1]$. Retirando do domínio de cos — que é todo o conjunto $\mathbb{R}$ — os valores de x para os quais $\cos x = 0$, ou seja, deixando apenas os valores $x \in D_1$, temos que

$$x \in D_1 \iff -1 \leq \cos x < 0 \text{ ou } 0 < \cos x \leq 1.$$

Daí, segue que

$$x \in D_1 \iff \frac{1}{\cos x} \leq -1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq \frac{1}{\cos x},$$

ou, o que é o mesmo,

$$x \in D_1 \iff \sec x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq \sec x.$$

Reciprocamente, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, temos que $-1 \leq \dfrac{1}{y} \leq 1$ e $\dfrac{1}{y} \neq 0$. Logo, deve existir $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tal que $\dfrac{1}{y} = \cos x$; mas isso implica

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Portanto, concluímos que a imagem da função secante, $\sec : D_1 \to \mathbb{R}$, é o conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$:

$$\operatorname{Im}(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Utilizando o fato de que para $x \in D$ temos $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, vamos calcular $\sec x$ em alguns valores de x, nos quais sabemos o valor de $\cos x$. Com efeito, temos

$$\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = 1,$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

e

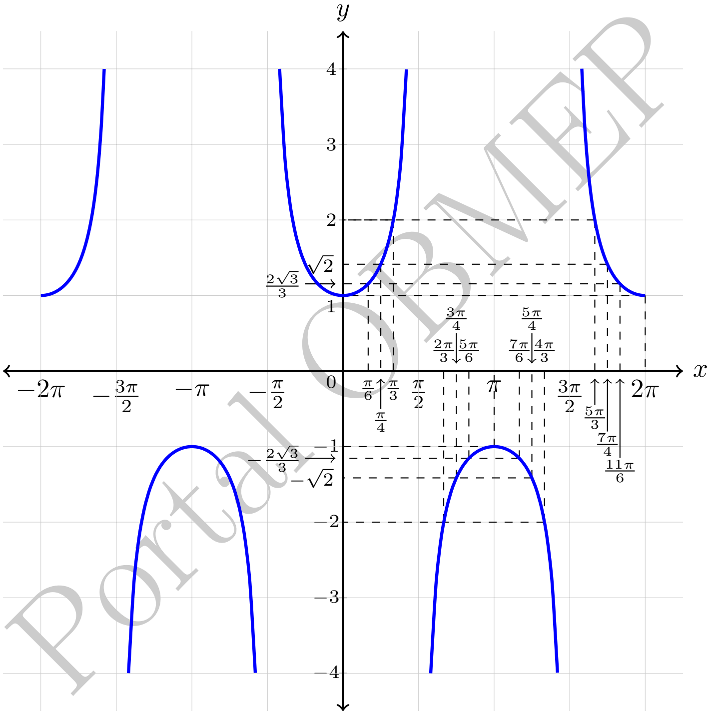
$$\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Utilizando reduções ao primeiro quadrante, construímos as seguintes tabelas de pares ordenados $(x, \sec x)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sec x$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sec x$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Finalmente, recordando o fato de que a função secante é periódica com período igual a 2π, podemos utilizar os valores acima para esboçar seu gráfico, o que fazemos na figura a seguir:



Domínio, imagem e gráfico da função cossecante

Também em aulas anteriores, aprendemos que, para x real, pode-se definir a cossecante de x se, e somente se, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, fazendo $D_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, temos definida a função secante $\operatorname{cosec} : D_2 \to \mathbb{R}$, que a cada x em D faz corresponder o valor $\operatorname{cosec} x$. Além disso, mostramos que se $x \in D$, então $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$; desse modo,

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec}(x+p) = \operatorname{cosec} x &\iff \frac{1}{\operatorname{sen}(x+p)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\\ &\iff \operatorname{sen}(x+p) = \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

Como a função seno tem período 2π, segue dos cálculos acima que a função cossecante também é periódica e o seu período também é igual a 2π.

Temos que a imagem da função $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o intervalo fechado $[-1,1]$. Procedendo de modo análogo ao que foi feito no caso da secante, temos que

$$x \in D_2 \iff -1 \leq \operatorname{sen} x < 0 \;\text{ ou }\; 0 < \operatorname{sen} x \leq 1.$$

Daí, segue que

$$x \in D_2 \iff \frac{1}{\operatorname{sen} x} \leq -1 \;\text{ ou }\; 1 \leq \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

ou, ainda,

$$x \in D_2 \iff \operatorname{cosec} x \leq -1 \;\text{ ou }\; 1 \leq \operatorname{cosec} x.$$

Reciprocamente, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, temos que $-1 \leq \frac{1}{y} \leq 1$ e $\frac{1}{y} \neq 0$. Logo, deve existir $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq k\pi$, tal que $\frac{1}{y} = \operatorname{sen} x$. Mas isso implica

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x.$$

Assim, concluímos que a imagem da função cossecante, $\operatorname{cosec} : D_2 \to \mathbb{R}$, também é o conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$:

$$\operatorname{Im}(\operatorname{cosec}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Utilizando o fato de que, para $x \in D_2$, tem-se $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, vamos calcular $\operatorname{cosec} x$ em alguns valores nos quais sabemos o valor de $\operatorname{sen} x$. Temos que

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

e

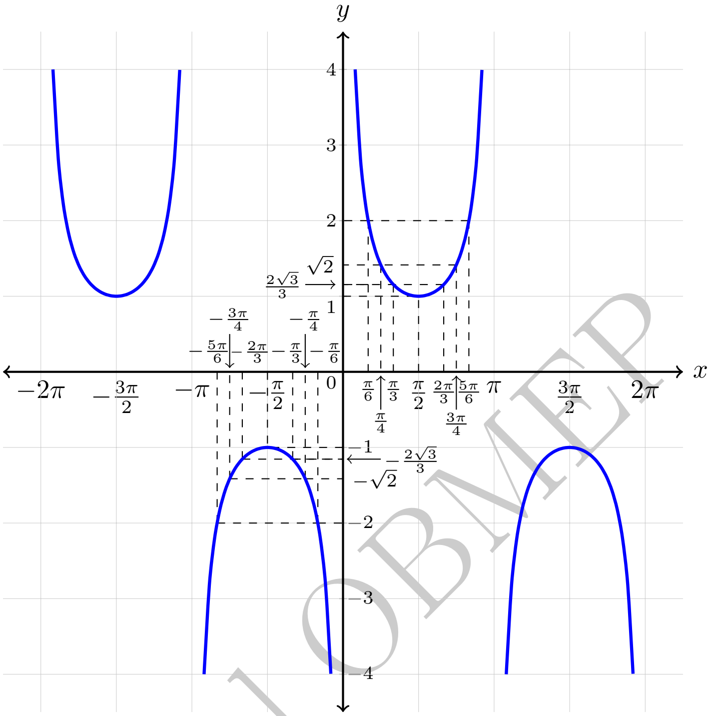
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1,$$

Utilizando reduções ao primeiro quadrante e o fato de que a função cossecante é ímpar, pois a função seno o é, construímos as seguintes tabelas de pares ordenados $(x, \operatorname{cosec} x)$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{cosec} x$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{cosec} x$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2

Finalmente, recordando o fato de que a função cossecante é periódica com período igual a 2π, podemos utilizar os valores acima para esboçar seu gráfico, o que fazemos na figura a seguir:



Recordando que

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Longrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{cosec} x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(sempre que $\operatorname{sen} x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ forem não nulos), não é difícil perceber que podemos obter o gráfico da função cossecante a partir do gráfico da função secante por meio de uma *translação* de $\dfrac{\pi}{2}$ unidades para a direita, paralelamente ao eixo das abscissas. Por isso é que as curvas que compõem os gráficos dessas duas funções são tão parecidas.

Domínio, imagem e gráfico da função cotangente

Sabemos que, dado $x \in \mathbb{R}$, pode-se definir a cotangente de x se, e somente se, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Desse modo, fazendo $D_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, podemos definir a função cotangente $\operatorname{cotg} : D_2 \to \mathbb{R}$, que a cada x em D_2 faz corresponder o valor $\operatorname{cotg} x$. Mostramos em aulas anteriores que se, $x \in D_2$, então $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$; assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(x+p) = \operatorname{cotg} x &\iff \frac{1}{\operatorname{tg}(x+p)} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\ &\iff \operatorname{tg}(x+p) = \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Como a função tangente tem período π, segue dos cálculos acima que a função cotangente também é periódica e o seu período também é igual a π.

Sabemos que a função $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *sobrejetora*, isto é, sua imagem é todo o conjunto $\mathbb{R}$. Além disso, os números reais que não pertencem a D_2 são exatamente os pontos nos quais a tangente é igual a zero. Desse modo, dado qualquer y real tal que $y \neq 0$, temos que existe x real, tal que $x \neq k\pi$ e $\dfrac{1}{y} = \operatorname{tg} x$, ou seja

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{cotg} x.$$

Portanto, concluímos que a função $\operatorname{cotg} : D_2 \to \mathbb{R}$ também é sobrejetora, logo, sua imagem é $\mathbb{R}$.

Para esboçar o gráfico da função cotangente, vamos usar a identidade $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, $x \in D_2$, para calcular $\operatorname{cotg} x$ em alguns valores de x.

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

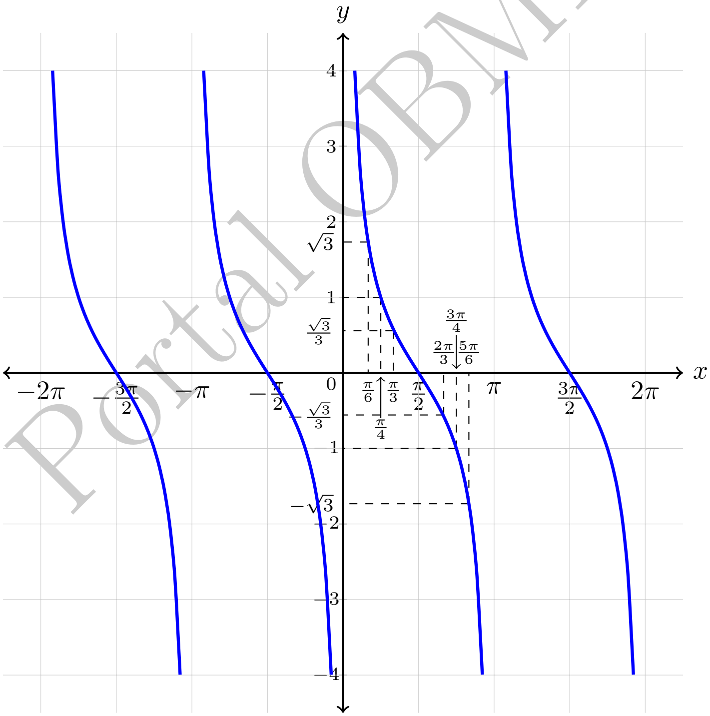
e

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por outro lado, utilizando uma vez mais reduções ao primeiro quadrante, construímos a seguinte tabelas de pares ordenados $(x, \operatorname{cotg} x)$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\operatorname{cotg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Finalmente, usando o fato de que o período da função cotangente é igual a π, temos o seguinte esboço de seu gráfico.



Recordando que

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

temos, sempre que $\operatorname{sen} x, \cos x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).
\end{aligned}$$

Assim, como no caso da função cossecante, não é difícil perceber que podemos obter o gráfico da função cotangente a partir do gráfico da função tangente por meio de dois "*movimentos*: inicialmente, uma *reflexão* em torno do eixo das ordenadas; em seguida, uma *translação* de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita, paralelamente ao eixo das abscissas. Também aqui, é por isso é que as curvas que compõem os gráficos dessas duas funções são tão parecidas.

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Observamos, ainda, que pode ser útil, para a aprendizagem da turma, o professor apresentar variações das funções secante, cossecante e cotangente — por exemplo, $2 \sec x$ e $\operatorname{cosec}(3x)$ — e pedir aos alunos para tentarem descobrir o efeito que essas mudanças causam no domínio, na imagem e nos gráficos dessas funções.

Dados $D \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : D \to \mathbb{R}$, seja $g : E \to \mathbb{R}$ e $h : F \to \mathbb{R}$ as funções dadas por $g(x) = f(x + a)$ e $h(x) = f(ax)$, com $a \neq 0$. A referência [2] explica que $E = \{x - a; x \in D\}$ e $F = \left\{\frac{x}{a}; x \in D\right\}$; ela explica, ainda, a relação entre os gráficos de f e de g, bem como de f e de h. As observações que fizemos aqui, relativas às relações entre os gráficos das funções secante e cossecante, tangente e cotangente, são casos particulares dessa situação mais geral. A referência [1] explica a Trigonometria básica e suas relações com a Geometria, enquanto a referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2022.

2 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2022.

3 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.