Material Teórico - Módulo Divisibilidade

Propriedades dos restos

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

17 de junho de 2023

Portal da Matemática
OBMEP

1 Propriedades dos restos

Nesta aula, retomamos o estudo da operação de divisão, examinando duas propriedades simples que serão bastante úteis na aula sobre critérios de divisibilidade, que virá adiante.

Dessa vez, ao invés de centrar nossa atenção nos divisores, queremos entender melhor o comportamento dos restos de divisões de vários números por um mesmo divisor. Usamos ideias semelhantes às da aula "A operação de divisão", deste módulo.

1.1 Somando restos

Exemplo 1. *Observe que o número* 100 *deixa resto* 1 *na divisão por* 3*, pois* $100 = 3{\times}33 + 1$*. Por outro lado, o número* 73 *também deixa resto* 1 *na divisão por* 3*, pois* $73 = 3{\times}24 + 1$*. Use tais observações para calcular o resto da divisão de* 173 *por* 3*.*

Solução. É claro que poderíamos simplesmente dividir o número 173 por 3, montando o dispositivo padrão da divisão para obter o quociente e o resto. No entanto, queremos saber se é possível usar as informações adicionais que nos foram dadas no enunciado para obter rapidamente esses valores, com especial interesse no valor do resto.

A resposta curta é que sim: como $173 = 100 + 73$, para obter o resto de 173 por 3, somamos o resto de 100 por 34 ao resto de 73 por 3. Como foi dado no enunciado que o resto de 100 por 3 é 1 e o resto de 73 por 3 é 1, concluímos que o resto de 173 por 3 é igual a $1 + 1$, ou seja, a resposta é 2.

No exemplo seguinte, veremos que há um cuidado adicional que precisamos ter ao somar os restos. Por hora, vamos tentar entender porque essa conta funciona.

A primeira maneira é interpretando as divisões. O cálculo $100 = 3{\times}33 + 1$ nos diz que podemos agrupar 100 objetos em 33 grupos de 3 sendo que sobrará 1 objeto. Podemos ignorar a quantidade de grupos formados e focar apenas no fato de que 1 objeto ficou "sem grupo". Da mesma forma, ao fazer $73 = 3{\times}24 + 1$, formamos 24 grupos de 3 objetos e sobra 1 objeto. Assim, ao juntar todos os 173 objetos, mantendo os mesmos grupos que já haviam sido formados anteriormente, ficamos com 2 objetos sem grupo.

Também podemos expressar a argumentação acima, com a seguinte conta, em que colocamos em evidência o divisor 3:

$$\begin{aligned} 173 &= 100 + 73 \\ &= (3\times 33 + 1) + (3\times 24 + 1) \\ &= 3\times 33 + 3\times 24 + 1 + 1 \\ &= 3\times(33 + 24) + 2 \\ &= 3\times 57 + 2. \end{aligned}$$

Aqui, fomos um pouco adiante e calculamos também o quociente 57 da divisão de 173 por 3.

Sugerimos que o leitor faça diretamente a divisão de 173 por 3 para conferir que o quociente é 57 e o resto é 2. □

Vejamos outro exemplo, onde teremos que tomar um cuidado adicional.

Exemplo 2. *Sabendo que o resto da divisão de* 1000 *por* 7 *é igual a* 6 *e o resto da divisão de* 402 *por* 7 *é igual a* 3*, calcule o resto da divisão de* 1402 *por* 7*.*

Solução. Como antes, veja que, agrupando os 1000 objetos em grupos de 7, teremos uma sobra de 6 objetos. Aqui, não nos interessa o quociente da divisão, ou seja, não importa quantos grupos foram formados. O que importa é que ficamos com esses 6 objetos "órfãos". Da mesma forma, ao dividir 402 por 7, são formados alguns grupos e sobram 3 objetos.

Seguindo a lógica do exemplo anterior, ao juntar todos os 1402 objetos ficamos com $6 + 3 = 9$ sobrando. O problema é que 9 não é menor do que 7 e, assim, 9 não pode ser considerado resto da divisão de um número por 7. Isso porque com os 9 objetos que sobraram podemos montar mais um grupo de 7 objetos, de forma que restam apenas 2 objetos sem grupo.

Logo, o resto da divisão de $1402 = 1000 + 402$ por 7 é igual a 2 (que é o resto da divisão, por 7, da soma $6 + 3$ dos restos das divisões de 1000 e de 402). □

O interessante da solução acima é que ela pode ser usada mesmo em casos nos quais não conheçamos os números que estão sendo divididos (ou seja, os dividendos).

Exemplo 3. *Carla escreveu um número em um pedaço de papel. Camila fez o mesmo. Rafael, observou os dois números e escreveu sua soma. Carla observou que o resto de seu número na divisão por 7 é igual a 5. Camila observou que o resto de seu número por 7 é igual a 3. Qual o resto do número escrito por Rafael na divisão por 7?*

Solução. Como o número de Rafael é a soma dos números de Carla e Camila, primeiro somamos os restos obtidos por Carla e Camila: $5 + 3 = 8$. Assim, Rafael tem alguns grupos de 7 objetos e uma sobra de 8 objetos. Com a sobra de 8, ele pode formar mais um grupo de 7 objetos, retando apenas 1 objeto sem grupo. Assim, o resto do número de Rafael por 7 é igual a 1. $\square$

Observação 4. *No exemplo acima é importante que todos estejam dividindo seus valores por um mesmo número (ou seja, que o divisor seja sempre o mesmo, no caso, 7). O argumento não funcionaria se, por exemplo, Carla estivesse realizando uma divisão por 7 e Camila uma divisão por 5.*

A discussão pode ser resumida na seguinte propriedade.

> Seja d um número natural. **O resto na divisão de uma soma por d é igual ao resto da soma dos restos das parcelas (nas respectivas divisões por d).**

Reescrevamos a propriedade acima usando símbolos matemáticos:

> Sejam m, n e d números naturais. Se x é o resto da divisão de n por d e y é o resto da divisão de m por d, então o resto da divisão de $n + m$ por d é igual ao resto da divisão de $x + y$ por d.

Observação 5. *A propriedade acima é falsa se trocarmos "resto" por "quociente". O quociente de uma soma de dois números por d pode ser igual à soma dos quocientes das parcelas por d, mas também pode ser igual a essa soma mais 1. (Porque?).*

Para fixar as ideias, vejamos um exemplo com várias divisões. Observe as seguintes divisões do número 47 por 2, 3, 4 e 5 respectivamente. (Sugerimos que o leitor monte o dispositivo da divisão e faça as contas por si mesmo, antes de conferir os resultados abaixo.)

Divisão por 2: $47 = 2 \times 23 + 1$ (quociente: 23 e resto: 1).
Divisão por 3: $47 = 3 \times 15 + 2$ (quociente: 15 e resto: 2).
Divisão por 4: $47 = 4 \times 11 + 3$ (quociente: 11 e resto: 3).
Divisão por 5: $47 = 5 \times 9 + 2$ (quociente: 9 e resto: 2).

Agora, quebremos o número 47 em duas parcelas, de forma arbitrária; por exemplo, $47 = 16 + 31$. Em seguida, calculemos os restos dos números 16 e 31 por 2, 3, 4 e 5. Os resultados foram organizados na seguinte tabela:

Número:	16	+	31	=	47
Resto da divisão por 2:	0	+	1	=	1
Resto da divisão por 3:	1	+	1	=	2
Resto da divisão por 4:	0	+	3	=	3
Resto da divisão por 5:	1	+	1	=	2

No exemplo acima, em cada linha a soma dos restos é menor do que o divisor, logo, a soma dos restos é o resto da soma. Quando isso não ocorrer, lembre-se de tomar *o resto da soma dos restos*. Por exemplo, o resto do número 101 por 4 é igual 1; mas, se escrevemos $100 = 23 + 78$ e calcularmos os restos de 23 e 78 por 4, obteremos:

Número:	23	+	78	=	101
Resto da divisão por 4:	3	+	2	=	$\overset{1}{\cancel{5}}$

Ou seja, a soma dos restos é $3+2=5$, que não é o resto da soma $23+78$. Como vimos, o resto da soma é 1 (que é o resto de $3+2=5$ por 4).

Toda a discussão acima, permanece válida se tivermos mais do que duas parcelas. Por exemplo, veja que os restos dos números 3000, 200, 50 e 7 na divisão por 3 são iguais a 0, 2, 2 e 1, respectivamente. Assim, o resto da divisão de 3247 por 3 pode ser calculado como mostrado na tabela abaixo:

Número:	3000	+	200	+	50	+	7	=	3247
Resto por 3:	0	+	2	+	2	+	1	=	$\cancel{5}^{\,2}$

Em palavras, primeiro somamos os restos: $0+2+2+1=5$; em seguida, calculamos o resto dessa soma por 3. Assim, obtemos a resposta, 2.

Observação 6. *É possível* adaptar *a propriedade discutida nesta seção também para a operação de subtração. Contudo, é preciso tomar um cuidado especial com o caso em que a diferença entre os restos seja um número negativo. Em uma tal situação, deve-se somar o dividendo à diferença entre os restos, para obter um número maior ou igual a zero.*

Um exemplo deve esclarecer a situação: conforme vimos acima, o resto da divisão de 3000 *por* 3 *é* 0*, enquanto o da divisão de* 200 *por* 3 *é* 2*. Como* $0-2=-2=-3+1$*, o resto da divisão de* $3000-200=2800$ *por* 3 *é* $1=3+(-2)$*. Isso ocorre porque* $3000=1000\times 3$ *e* $200=66\times 3+2$*, logo,*

$$\begin{aligned}3000-200 &= 1000\times 3-(66\times 3+2)\\ &= (1000-66)\times 3-2\\ &= (1000-66)\times 3-3+1\\ &= (1000-66-1)\times 3+1.\end{aligned}$$

1.2 Multiplicando restos

A propriedade discutida na seção anterior também vale para a operação de multiplicação. Isso acaba sendo bastante útil, uma vez que a multiplicação tende a produzir números grandes rapidamente.

Exemplo 7. *Qual o resto da divisão do número* $73{\times}41$ *na divisão por 7?*

Solução. Uma vez mais, é claro que poderíamos calcular o produto $73{\times}41$ e, em seguida, realizar a divisão por 7 para obter o resto desejado. (Sugerimos que o leitor faça isso, a fim de conferir a resposta.) Entretanto, podemos chegar no resultado "de cabeça", fazendo poucas contas, conforme descrito a seguir.

O resto de 73 por 7 é claramente igual a 3, já que 70 é um múltiplo de 7. Por outro lado, o resto de 41 por 7 é igual a 6, uma vez que $41 = 35 + 6$ e 35 é um múltiplo de 7. (Uma alternativa mais rápida seria perceber que 42 é múltiplo de 7 e, por isso, $42 - 1$ deve deixar resto 6 na divisão por 7.) Assim, o resto da divisão de $73{\times}41$ por 7 é igual ao resto da divisão de $3{\times}6$ (o produto dos restos dos fatores) por 7. Como $3{\times}6 = 18$ e o resto de 18 por 7 é igual a 4, temos que o resto da divisão de $73{\times}41$ por 7 também é igual a 4. $\square$

A justificativa de por que a solução acima funciona não é tão óbvia quanto no caso do soma, para ser explicada em palavras. Mas, se você pensar um pouco, vai perceber que é verdade, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação. Vejamos:

$$\begin{aligned} 73 &= 7{\times}10 + 3, \\ 41 &= 7{\times}5 + 6. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 73{\times}41 &= (7{\times}10 + {\color{blue}3}){\times}(7{\times}5 + {\color{blue}6}) \\ &= 7{\times}10{\times}7{\times}5 + 7{\times}10{\times}6 + 3{\times}7{\times}5 + {\color{blue}3{\times}6} \\ &= 7{\times}({\color{red}10{\times}7{\times}5 + 10{\times}6 + 3{\times}5}) + {\color{blue}3{\times}6} \\ &= 7{\times}{\color{red}q} + {\color{blue}18}. \end{aligned}$$

Aqui, não nos preocupamos em calcular o valor do quociente (denotado por q, na expressão acima). O importante é que o número $7{\times}q$ é um múltiplo de 7, logo, deixa resto 0 na divisão por 7. Assim, usando a propriedade da soma dos restos, temos que o resto de $73{\times}41$ por 7 é igual ao resto de $0 + 18$ por 7, que, por sua vez, é igual ao resto de 18 por 7, que é 4.

O leitor pode perceber que o argumento acima não é particular para os números 73, 41 e 7; um cálculo semelhante funciona de forma geral. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado.

> Seja d um número natural. **O resto na divisão de um produto de dois números por d é igual ao resto, da divisão por d, do produto dos restos desses dois fatores (em suas respectivas divisões por d).**

Como antes, também podemos escrever essa propriedade de forma detalhada, em símbolos.

> Sejam m, n e d números naturais. Se x é o resto da divisão de n por d e y é o resto da divisão de m por d, então o resto da divisão de $n{\times}m$ por d é igual ao resto da divisão de $x{\times}y$ por d.

Como antes, a propriedade enunciada acima também vale para produtos de mais de dois fatores. Vejamos um

Exemplo 8. *Mostre que toda potência de* 4 *deixa resto* 1 *na divisão por* 3.

Solução. Vamos usar a propriedade da multiplicação dos restos. Como $4 = 3 + 1$, temos que o resto da divisão de 4 por 3 é 1. Uma potência de 4 é um número da forma:

$$4^n = \underbrace{4{\times}4{\times}\ldots{\times}4}_{n \text{ vezes}}.$$

Assim, o resto de 4^n por 3 é igual ao produto dos restos:

$$\underbrace{1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{n \text{ vezes}} = 1,$$

já que o produto de números iguais a 1 é igual a 1.

Em particular, segue que os números:

$$4^1 = 4, \quad 4^2 = 16, \quad 4^3 = 64, \quad 4^4 = 256, \quad 4^5 = 1024, \ldots$$

todos deixam resto 1 na divisão por 3. $\square$

Dicas para o Professor

Este material pode ser tratado em um encontro de 50 minutos. O professor experiente pode notar, aqui reunidos, os rudimentos de operações relacionadas à relação de congruência entre inteiros, módulo um inteiro maior que 1. Não cabe tratar de congruências aqui, dado que o material é voltado a alunos do sexto ano. Ainda assim, a familiariedade com a *aritmética dos restos* é algo que pode ser de grande valia para os alunos, em estudos futuros.