Material Teórico - Módulo Equações Algébricas-Propriedades das Raízes

Coeficientes Reais

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

16 de outubro de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula analisamos propriedades de uma equação algébrica polinomial com *coeficientes reais*. Note que ainda permitimos que as raízes sejam obtidas no universo dos números complexos podendo ser ou não reais.

2 Raízes conjugadas

O principal resultado deste módulo diz respeito a raízes complexas que são conjugadas (uma da outra). Lembre-se de que se $z = a+bi$ é um número complexo escrito em sua forma algébrica, ou seja, em que a e b são números reais, então o conjugado (complexo) de z é o número $\overline{z} = a - bi$. Note que o conjugado de $\overline{z}$ é o complexo original, já que:

$$\overline{\overline{z}} = a - (-bi) = a + bi = z.$$

Veja, também, que o conjugado de um número complexo é ele próprio se, e somente se, o número for real.

Duas raízes de uma dada equação que formem um par de números complexos conjugados são chamadas de raízes conjugadas.

Vamos começar com um exemplo bastante simples com o objetivo de tirar algumas conclusões para depois tentar generalizá-la (e fornecer a devida demonstração de que tal generalização é válida).

Exemplo 1. *Resolva a equação de segundo grau:*

$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Solução. Esta é uma equação de segundo-grau bastante simples que iremos resolver diretamente usando a fórmula de Bhaskara. (Alternativamente, o leitor pode tentar resolver a equação usando o método de completar quadrados, estudado em módulos anteriores).

O discriminante desta equação é

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Isso indica que a equação não possui raiz real. Mas no universo dos complexos, fazendo $\sqrt{-4} = 2i$, obtemos duas raízes:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Ou seja, temos um par de raízes complexas conjugadas: $2 + i$ e $2 - i$. $\square$

O que observamos é que as raízes não reais da equação x^2-4x+5 formam um par de conjugados complexos. Podemos ver, facilmente, que isso é válido para toda equação de segundo grau *cujos coeficientes são números reais.* De fato, analisando o discriminante, temos 3 casos:

(i) $\Delta > 0$: a equação tem duas raízes reais distintas.

(ii) $\Delta = 0$: a equação tem uma raiz real dupla.

(iii) $\Delta < 0$: a equação tem duas raízes não reais distintas. O fato de que os coeficiente da equação original são reais, implica que uma raiz será o conjugado da outra. De fato, se a equação é $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos que as raízes são:

$$\frac{-b}{2a} + \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{e} \quad \frac{-b}{2a} - \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Veja que $\frac{-b}{2a}$ e $\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ são número reais, logo os dois números acima realmente são conjugados.

Com isso, demonstramos que sempre que uma equação de segundo grau com coeficientes reais possui uma raiz não real temos que a outra raiz é o conjugado da primeira.

Por outro lado, se algum dos coeficientes da equação for um complexo não real, isso não precisa ser verdade. Por exemplo, a equação $x^2 - ix + 2 = 0$ possui discriminante $\Delta = -9$; logo possui raízes

$$x_1 = \frac{i + 3i}{2} = 2i \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{i - 3i}{2} = -i;$$

sendo que $2i$ e $-i$ não são conjugados um do outro.

Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar o teorema abaixo, que generaliza a discussão acima para equações polinomiais de qualquer grau, *desde que todos os coeficientes sejam reais.*

Teorema 2 (Raízes conjugadas). *Se um número complexo não-real, $z = a + bi$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz desta equação.*

Solução. Vamos primeiro demonstrar algumas propriedades da operação de "conjugação". Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos, com a, b, c, d reais. Seja ainda α um número real qualquer. Então vale que:

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(ii) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(iii) $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$.

Para demonstrar cada uma dos itens basta calcular os conjugados em cada um dos casos. Veja:

(i)

$$\begin{aligned}
\overline{z + w} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\
&= \overline{a + c + (b + d)i} \\
&= (a + c) - (b + d)i \\
&= (a - bi) + (c - di) \\
&= \overline{z} + \overline{w}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(a + bi)(c + di)} \\
&= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)i \\
&= (a - bi)(c - di) \\
&= \overline{z} + \overline{w}.
\end{aligned}$$

(iii) Pelo item anterior, temos que $\overline{\alpha z} = \overline{\alpha} \cdot \overline{z}$. Mas como α é real, temos que $\overline{\alpha} = \alpha$. Logo,

$$\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}.$$

Agora, seja k um inteiro positivo. Veja que aplicando a propriedade (ii) várias vezes obtemos

(iv) $\overline{z^k} = \overline{z}^k$,

uma vez que

$$\overline{z^k} = \overline{\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{k \text{ vezes}}} = \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \ldots \cdot \overline{z}}_{k\text{vezes}} = \overline{z}^k.$$

Por fim, combinando as propriedades acima, obtemos que para qualquer polinômio $p(x)$ com coeficientes reais temos:

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)}.$$

De fato, seja $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio em que $a_n, \ldots, a_1, a_0$ são números reais. Aplicando p em $\overline{z}$, usando a propriedade (iv), em seguida (iii) e depois (i) temos que:

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{p(z)}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir rapidamente a prova deste teorema. Se z é uma raiz qualquer de $p(x)$, então $p(z) = 0$. Logo,

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.$$

Logo, $\overline{z}$ também é raiz. □

Observação 3. *No enunciado do Teorema 2 pedimos que z seja um número não-real porque este é o caso que interessa. No caso em que z é real, temos que $\overline{z} = z$, logo, obviamente, $\overline{z}$ é raiz de $p(x)$. Mas tratamos isso separadamente, para deixar claro que, neste caso, $\overline{z}$ não é uma outra raiz, mas a mesma raiz; também não estamos implicando que z seja raiz de multiplicidade 2.*

Exemplo 4. *Escreva um polinômio de coeficientes reais, de grau mínimo, de modo que 0, $i\sqrt{2}$ e $i\sqrt{3}$ sejam raízes simples.*

Solução. Seja $p(x)$ o polinômio procurado. Pelo Teorema 2, como $p(x)$ tem coeficientes reais, além dos três números do enunciado, os conjugados de $i\sqrt{2}$ e $i\sqrt{3}$, que são $-i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{3}$, também precisam ser raízes de $p(x)$.

Pelo Teorema de D'Alembert (veja a aula "Teorema do Resto" do Módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos" do 3º Ano do Ensino Médio), temos que $p(x)$ é divisível pelo polinômio

$$\begin{aligned} q(x) &= x(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) \\ &= x(x^2 + 2)(x^2 + 3) \\ &= x^5 + 5x^3 + 6. \end{aligned}$$

Como o próprio $q(x)$ possui coeficientes reais, ele é um polinômio de grau mínimo que satisfaz o enunciado. Logo, podemos fazer $p(x) = x^5 + 5x^3 + 6$. $\square$

Outro ponto importante é observar que se $z = a + bi$ é um complexo, então (a expansão de) $(x - z)(x - \overline{z})$ é polinômio de grau 2 com coeficientes reais. De fato,

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z})x + z\,\overline{z},$$

onde $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ e

$$z\,\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Exemplo 5. *Seja $p(x) = x^4 - 2x^2 + 16x - 15$. Sabendo que $1 - 2i$ é uma das raízes de $p(x)$, calcule as demais raízes.*

Solução. Pelo Teorema 2, como $1-2i$ é raiz de $p(x)$, temos que seu conjugado $1+2i$ também é raiz. Logo,

$$p(x) = (x-(1-2i))(x-(1+2i))\,q(x),$$

para algum polinômio $q(x)$ e as demais raízes de $p(x)$ são raízes deste $q(x)$. Pela observação anterior, temos que:

$$(x-(1-2i))(x-(1+2i)) = x^2-2x+5.$$

Assim, para calcular $q(x)$ basta efetuar a divisão de $p(x)$ por x^2-2x+5. Vejamos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -2x^2 & +16x & -15 & x^2-2x+5 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & -5x^2 & & & x^2+2x-3 \\
\cline{1-3}
 & 2x^3 & -7x^2 & +16x & & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & -10x & & \\
\cline{2-4}
 & & -3x^2 & +6x & -15 & \\
 & & 3x^2 & -6x & +15 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Logo, $q(x) = x^2+2x-3$. As raízes de $q(x)$ são as raízes da equação de segundo grau

$$x^2+2x-3=0,$$

para a qual $\Delta = (2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12 = 16$. Assim,

$$x = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = 1\pm 2.$$

Ou seja, as raízes do polinômio do enunciado são:

$$1-2i,\ 1+2i,\ 3,\ -1.$$

$\square$

Exemplo 6. *Sabendo que $x=i$ é raiz da equação*

$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=0,$$

calcule as outras raízes.

Solução. Pelo Teorema 2, como i é uma raiz e o polinômio

$$p(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$

tem coeficientes reais, temos que $-i$ também é raiz.

Assim,

$$p(x) = (x - i)(x + i)\, q(x) = (x^2 + 1)\, q(x),$$

para algum polinômio $q(x)$. E as demais raízes de $p(x)$ são raízes de $q(x)$. Podemos calcular $q(x)$ efetuando a divisão euclidiana de $p(x)$ por $x^2 + 1$ (caso queira, você pode acompanhar o passo a passo desta divisão na vídeo-aula):

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -x^4 & +2x^3 & -2x^2 & +x & -1 & x^2+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & & -x^3 & & & & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \cline{1-3}
& -x^4 & +x^3 & -2x^2 & & & \\
& x^4 & & +x^2 & & & \\ \cline{2-4}
& & x^3 & -x^2 & +x & & \\
& & -x^3 & & -x & & \\ \cline{3-5}
& & & -x^2 & & -1 & \\
& & & x^2 & & +1 & \\ \cline{4-6}
& & & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Para calcular as raízes de $q(x)$ precisamos resolver a equação de terceiro grau:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$$

Para isso, basta "chutar e verificar" que o número 1 é uma das raízes, já que:

$$1^2 - 1^2 + 1 - 1 = 0.$$

Dividindo, $q(x)$ por $x - 1$, por exemplo, usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}.$$

Logo, $q(x) = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x+i)(x-i)$.

Por fim, obtemos:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-i)(x+i)q(x) \\ &= (x-1)(x+i)^2\,(x-i)^2 \end{aligned}$$

Concluímos que as raízes da equação do enunciado são

$$1, \quad i \quad \text{e} \quad -i.$$

$\square$

Teorema 7. *Todo polinômio de grau ímpar que possui coeficientes reais, tem que possuir pelo menos uma raiz real.*

Solução. Pelo Teorema 2, para cada raiz de $p(x)$ não-real, temos que seu conjugado também é raiz. Afirmamos ainda que se $z = a+bi$ é uma raiz não-real que possui multiplicidade k então $\overline{z}$ também precisa ter multiplicidade k. Vamos provar isso por absurdo. Suponha, sem perda da generalidade, que $\overline{z}$ tem multiplicidade ℓ onde $\ell > k$.

Assim, podemos escrever:

$$p(x) = (x-z)^k(x-\overline{z})^\ell\,q(x),$$

onde $q(x)$ é um polinômio com coeficientes complexos. Isso também pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-z)^k(x-\overline{z})^k\,(x-\overline{z})^{\ell-k}\,q(x) \\ &= \big((x-z)(x-\overline{z})\big)^k\,(x-\overline{z})^{\ell-k}\,q(x) \\ &= \left(x^2-2ax+a^2+b^2\right)^k\,(x-\overline{z})^{\ell-k}\,q(x) \end{aligned}$$

Como $g(x) = \left(x^2-2ax+a^2+b^2\right)^k$ é um polinômio de coeficiente reais, segue que o polinômio $h(x) = (x-\overline{z})^{\ell-k}\,q(x)$, por ser o quociente de $p(x)$ por $g(x)$, também tem coeficientes reais. Além disso, $\overline{z}$ é raiz de $h(x)$. Pelo Teorema 2, temos que z também é raiz de $h(x)$. Logo, z é raiz de $q(x)$. Mas isso implica que a multiplicidade de z em $p(x)$ é pelo menos

$k+1$, o que é uma contradição. Portando, é necessário que k seja igual a ℓ.

Disso tudo, concluímos que as raízes complexas de $p(x)$ sempre aparecem em pares: a soma das multiplicidade de z e $\overline{z}$ é $2k$, que é um número par. Como a soma de números pares é sempre par, concluímos que o total (ou seja, a soma das multiplicidades) das raízes não-reais de qualquer polinômio com coeficientes reais é um número par. Mas a soma de todas as multiplicidades das raízes (reais e não reais) de $p(x)$ é igual ao grau de $p(x)$.

Assim, se $p(x)$ tem grau ímpar, a soma das multiplicidades de suas raízes reais precisa ser ímpar. Em particular, esta soma não pode ser igual a zero. O que nos garante que existe pelo menos uma raiz real. $\square$

Uma consequência imediata do teorema acima é que todo polinômio com coeficientes reais de grau 3 possui pelo menos uma raiz real. Em verdade, há apenas 2 possibilidades: (i) todas as raízes são reais (podendo haver ou não raízes múltiplas) ou (ii) uma das raízes é real e as outras duas foram um par de complexos não-reais conjugados.

3 Conjugados racionais de números da forma $a + b\sqrt{k}$

Seja $x = a + b\sqrt{r}$ um número real tal que a e b são racionais e r é um número racional para o qual $\sqrt{r}$ não é racional. Por exemplo, $x = 3 + 5\sqrt{2}$. Definimos o "conjugado racional" de x como o número

$$\widetilde{x} = a - b\sqrt{r}.$$

Observação 8. *Aqui, usamos a notação $\widetilde{x}$ para distinguir o conjugado racional do conjugado complexo, $\overline{x}$ (que neste caso, seria igual ao próprio x, já que x é real), já que este texto trabalha com ambos. Contudo, em contextos onde se trabalha exclusivamente com números reais ou quando não há qualquer risco de confusão, pode-se optar por usar $\overline{x}$ para representar o conjugado racional.*

É imediato verificar que o análogo das propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) da seção anterior, são satisfeitas pelo conjugado racional. Ou seja, se k é um inteiro positivo, α é racional, $x = a + b\sqrt{r}$ e $y = c + d\sqrt{r}$ onde a, b, c, d, r são racionais e $\sqrt{r}$ é irracional, então:

(i) $\widetilde{x + y} = \widetilde{x} + \widetilde{y}$,

(ii) $\widetilde{xy} = \widetilde{x} \cdot \widetilde{y}$,

(iii) $\widetilde{\alpha x} = \alpha \widetilde{x}$,

(iv) $\widetilde{x^k} = \widetilde{x}^k$.

Teorema 9 (Raízes conjugadas racionais). *Seja $p(x)$ um polinômio com* coeficientes racionais*. Se t é uma raiz irracional de $p(x)$ da forma $t = a + b\sqrt{r}$ onde a, b e r são racionais, então $\widetilde{t}$ também é raiz de $p(x)$.*

Solução. A prova é análoga à do Teorema 2. Seja t uma raiz de $p(x)$ satisfazendo o enunciado. Então, pelas propriedades (i)–(iv), temos

$$p(\widetilde{t}) = \widetilde{p(t)} = \widetilde{0} = 0.$$

Ou seja, $\widetilde{t}$ também é raiz. □

Dicas para o Professor

O assunto deste material pode ser abordado em um encontro de 50 minutos, com a disponibilidade de tempo adicional para exercícios caso seja necessário.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.