Material Teórico - Módulo Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Definições básicas de funções polinomiais complexas

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

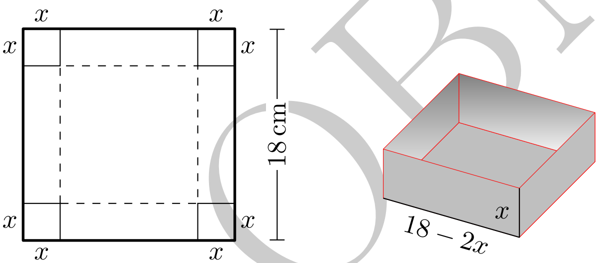
22 de janeiro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Definições básicas de funções polinomiais

No primeiro exemplo desta aula, motivaremos o estudo de funções polinomiais e equações algébricas a partir do problema do cálculo do volume de uma caixa de papel.

Exemplo 1. *Cortamos quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada que possui* 18 cm *de lado. Dobrando a folha recortada conforme mostrado na figura abaixo, obtemos uma caixa retangular sem tampa. Sendo x o comprimento do lado de cada quadrado recortado, qual função representa o volume da caixa obtida?*



Solução. Veja que, após dobradas as laterais, a base da caixa passa a ser um quadrado de lado $18 - 2x$ e, portanto, possui área $(18 - 2x)^2$. A caixa tem a forma de um paralelepípedo reto, portanto, seu volume é dado pelo produto entre a área de sua base e sua altura, que é igual a x. Assim, denotando o volume da caixa por $V(x)$, temos que:

$$V(x) = (180 - 2x)^2\, x.$$

Utilizando o produto notável para o quadrado de uma diferença, obtemos a expansão:

$$\begin{aligned}(18 - 2x)^2 &= 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 2x + (2x)^2\\ &= 324 - 72x + 4x^2.\end{aligned}$$

Substituindo isto na expressão anterior para $V(x)$ cghegamos a

$$V(x) = 324x - 72x^2 + 4x^3.$$

$\square$

A expressão do lado direito da igualdade acima, $324x - 72x^2 + 4x^3$, é um exemplo do que chamamos de *polinômio*. Por conta disso, a função $V(x)$ é chamada de *função polinomial*.

Os termos $324x$, $-72x^2$ e $4x^3$ são os *monômios* do polinômio $324x - 72x^2 + 4x^3$. Assim, observe que o polinômio é obtido somando esses monômios (perceba que o sinal de "$-$" é parte do monômio "$-72x^2$" e que $V(x) = (324x) + (-72x^2) + (4x^3)$).

De uma maneira mais precisa, um **monômio** é uma constante ou o produto de uma constante (neste exemplo, os números 324, -72 e 4) por uma potência de uma dada variável (neste exemplo, x) com expoente inteiro positivo (neste exemplo, x, x^2 e x^3). Uma soma (finita) de monômios define um **polinômio**, e as constantes que aparecem nos monônios de um polinômio são chamadas de **coeficientes** do polinômio.

Ao escrever um polinômio, é mais comum ordenar os monômios de acordo com os expoentes da variável e em ordem *decrescente* (porém, uma reordenação dos monômios não afeta o fato de que a expressão é um polinômio). Assim, a expressão $V(x)$ do Exemplo 1 pode ser reescrita como:

$$V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x.$$

Os expoentes da variável x não precisam ser consecutivos. Entretanto, como os coeficientes podem ser iguais a zero, sempre é possível reescrever um polinômio usando monômios de expoentes n, $n-1$, ..., 1 e um *termo independente* (de x), para algum inteiro positivo n. Aqui, o **termo independente** (possivelmente também igual a zero) corresponde ao monômio em que a variável x não aparece.

Por exemplo,

$$P(x) = 2x^5 + 3x^2 + x + 10$$

é um polinômio. Podemos reescrevê-lo na forma:

$$P(x) = 2x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x + 10$$

Exemplo 2. *Em relação ao Exemplo 1, que equação o valor de x deve satisfazer para que o volume da caixa seja igual a* $400\,\mathrm{cm}^3$*?*

Solução. Já vimos que o volume da caixa é dado pela função:

$$V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x. \tag{1}$$

Para que o volume seja $400\,\mathrm{cm}^3$, devemos encontrar o valor de x (medido em centímetros) tal que $V(x) = 400$. Ou seja,

$$4x^3 - 72x^2 + 324x = 400.$$

É comum organizar equações como esta colocando todos os termos não nulos de uma mesmo lado. Assim fazendo, concluímos que x deve satisfazer a equação:

$$4x^3 - 72x^2 + 324x - 400 = 0. \tag{2}$$

□

A expressão (2) é um exemplo de equação polinomial. Até aqui, ainda não temos as ferramentas necessárias para resolvê-la, por se tratar de uma equação de terceiro grau (o maior expoente de x no lado não nulo é igual a 3).

Observe, contudo, que existe uma diferença fundamental nas expressões (1) e (2). Ambas as expressões possuem igualdades, mas o papel de x em cada uma delas é bastante diferente.

Na expressão (1), x representa uma *variável* e a igualdade é satisfeita para qualquer valor de x no domínio da função $V(x)$. O papel de (1) é justamente informar como se deve calcular $V(x)$: substitua x por qualquer valor desejado e o lado direito nos dará a imagem da função naquele valor.

Por outro lado, na expressão (2) o papel de x é o de uma *incógnita*. A equação restringe os possíveis valores de x: há apenas um conjunto limitado de valores de x que satisfazem essa restrição e resolver a equação significa calcular quais são esses valores.

De modo geral, uma **função polinomial** é uma função da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

em que $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ e os valores de $a_n, \ldots, a_1, a_0$ são constantes, ou seja, não são influenciados pelo valor da variável x. O número n é chamado de **grau** do polinômio $P(x)$.

Uma **equação polinomial** é uma expressão do forma $P(x) = 0$ em que $P(x)$ é um polinômio.

O estudo de funções e equações polinomiais, no Portal da Matemática, se dá desde o 8º Ano do Ensino Fundamental. Porém, agora conhecemos um conjunto novo para expandir o domínio dessas funções: o conjuntos dos números complexos. Isso é crucial para um estudo mais aprofundado dos polinômios, que será feito nos próximos módulos.

Vamos estudar funções polinomiais cujos domínio e contradomínio são o conjunto dos números complexos. Mas não apenas isso: além do valor da variável, x, iremos assumir que os coeficientes do polinômio também podem assumir valores no conjunto dos complexos.

No que segue, registramos algumas definições básicas.

Definição 3. *Dada uma função polinomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, temos que:*

1. *O **valor numérico** de p em $z \in \mathbb{C}$ é $p(z)$,*
2. *$w \in \mathbb{C}$ é chamado de **raiz** de p quando $p(w) = 0$,*
3. *Dada $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ também polinomial, p e q são **iguais** quando $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$.*
4. *p é a função **identicamente nula** quando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$.*

2 Exercícios

Exemplo 4. *O lucro de uma loja é dado por*

$$L(x) = -100x^2 + 1400x - 4000$$

na venda diária de x peças.

(a) *Se a loja vendeu 8 peças em um dia, qual foi o lucro obtido?*

(b) *Quantas peças devem ser vendidas para que não haja nem lucro nem prejuízo em determinado dia?*

Solução.
(a) O que queremos é calcular o *valor numérico* do polinômio $L(x)$, ou seja, de $-100x^2 + 1400x - 4000$, quando o valor da variável x é igual 8. Portanto, temos que fazer

$$\begin{aligned} L(8) &= -100 \cdot 8^2 + 1400 \cdot 8 - 4000 \\ &= -6400 + 11200 - 4000 \\ &= 800. \end{aligned}$$

Logo, o lucro da loja será 800 (unidade de moeda).

(b) Para que não haja nem lucro nem prejuízo, o valor de x deve satisfazer a equação $L(x) = 0$. Portanto,

$$-100x^2 + 1400x - 4000 = 0.$$

Dividindo por -100, obtemos que x satisfaz:

$$x^2 - 14x + 40 = 0.$$

Essa é uma equação de segundo grau que possui discriminante

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 196 - 160 = 36.$$

Usando a fórmula de Bhaskara, temos que:

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 6}{2}.$$

Assim, os possíveis valores de x são 10 e 4. Ou seja, para que a loja não tenha lucro nem prejuízo, há duas possibilidades: ela deve vender exatamente 4 peças ou exatamente 10 peças naquele dia. $\square$

Exemplo 5. *Discuta, em função de m, o grau da função polinomial $p(x) = (m-2)x^4 + (m^2-4)x^5 + 3x^2 - 1$.*

Solução. Veja que o maior expoente de x na expressão acima é igual a 5 (cuidado, pois os monômios foram escritos numa ordem não usual). Ainda assim, para que o grau do polinômio $p(x)$ seja igual a 5 é preciso que o coeficiente de x^5 seja diferente de zero.

Isso *não* acontece apenas quando

$$m^2 - 4 = 0$$

ou, equivalentemente,

$$(m-2)(m+2) = 0.$$

Assim, para valores de m distintos de 2 e -2, o grau de $p(x)$ será igual a 5. Vejamos o que acontece nos outros dois casos.

Quando $m = 2$, temos que o coeficiente de x^4 também é igual a zero. Neste caso, $p(x) = 3x^2 - 1$ que possui grau 2. Quando $m = -2$, temos que $p(x) = -4x^4 + 3x^2 - 1$, que possui grau 4. $\square$

Exemplo 6. *Seja $p(x) = x^4 - 3x^2 - 5$. Calcule o valor de $p(i) - \frac{1}{7}p(3)$. (Aqui, i é a unidade imaginária, $i^2 = 1$.)*

Solução. Como $i^2 = -1$, temos que $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Logo, o valor numérico de p em i é

$$\begin{aligned} p(i) &= i^4 - 3i^2 - 5 \\ &= 1 - 3\cdot(-1) - 5 \\ &= 1 + 3 - 5 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Por outro lado, o valor numérico em 3 é

$$\begin{aligned} p(3) &= 3^4 - 3 \cdot 3^2 - 5 \\ &= 81 - 27 - 5 \\ &= 49. \end{aligned}$$

Assim, o valor requisitado é:

$$p(i) - \frac{1}{7}p(3) = -1 - \frac{1}{7} \cdot (49) = -1 - 7 = -8.$$

$\square$

Exemplo 7. *Calcule a e b em $p(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$, sabendo que 1 é raiz e $p(2) = 1$.*

Solução. Como 1 é raiz, temos que $p(1) = 0$. Então, substituindo o valor de x por 1 na definição de $p(x)$, temos que

$$a \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 0 \implies a + b = 3.$$

Além disso, o enunciado nos diz que $p(2) = 3$. Calculando o valor numérico de p em 2, obtemos que

$$a \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 1 = 3 \implies 8a + 2b = 12.$$

Assim, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ 8a + 2b = 12. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-1) e dividindo a segunda por 2, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} -a - b = -3, \\ 4a + b = 6. \end{cases}$$

Agora, somando membro a membro as duas equações deste sistema, concluímos que

$$3a = -3 + 6 \implies 3a = 3 \implies a = 1.$$

Por fim, voltando à primeira equação do sistema, chegamos a

$$b = 3 - a = 3 - 1 = 2.$$

Em resumo, temos que $a = 1$ e $b = 2$, logo

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

$\square$

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.