Material Teórico - Módulo Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria

Composição

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

14 de Janeiro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Podemos operar com transformações lineares. Sejam $S,T : V \to V$ aplicações lineares e k um número real. As transformações $k \cdot T : V \to V$ e $S + T : V \to V$ definidas por $(k \cdot T)(v) = k \cdot T(v)$ e $(S + T)(v) = S(v) + T(v)$ são lineares, como se verifica sem dificuldades. Nas notações da aula anterior, as matrizes de $k \cdot T$ e $S + T$ satisfazem $[k \cdot T] = k \cdot [T]$ e $[S + T] = [S] + [T]$. Isso nos diz que o conjunto $\mathcal{T}(V)$ das transformações lineares de V em V é um espaço vetorial com as operações acima definidas e, mais ainda, a identificação $\mathcal{T}(V) \ni T \mapsto [T] \in M_2$ preserva as operações de espaço vetorial. Aqui, M_2 denota o espaço das matrizes 2×2. Desse modo, $\mathcal{T}(V)$ e M_2 são, enquanto espaços vetoriais, iguais.

Há uma outra operação natural entre transformações lineares, a saber, a *composição*. É um simples exercício verificar que a composta de aplicações lineares ainda é uma aplicação linear. Então surge a questão: *como expressar a matriz da composta $T \circ S$ em termos das matrizes das transformações lineares S e T?* A resposta dessa pergunta se encontra em nossa primeira proposição, podendo ser resumida como *a matriz da composta é o produto das matrizes dos fatores*. Se chamarmos a composição de transformações lineares de *multiplicação*, vemos então que a correspondência natural $\mathcal{T}(V) \ni T \mapsto [T] \in M_2$, além de preservar o produto por escalar e a adição, preserva também a multiplicação. Feito isso, vamos explorar essa propriedade em alguns exemplos, derivar uma decomposição especial para transformações lineares - a *decomposição polar* - e apresentar uma aplicação geométrica.

2 Composição de transformações lineares

Sejam $S,T : V \to V$ transformações lineares. Se

$$[S] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T] = \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}$$

são as matrizes de S e T, sabemos que $S(x,y) = (ax+cy,bx+dy)$ e $T(x,y) = (ex+gy,fx+hy)$, para quaisquer números reais x e y.

Vamos calcular $(T \circ S)(x,y) = T(S(x,y))$:

$$\begin{aligned} &T(S(x,y)) = T(ax+cy,bx+dy) = \\ &= (e(ax+cy)+g(bx+dy),f(ax+cy)+h(bx+dy)) \\ &= ((ea+gb)x+(ec+gd)y,(fa+hb)x+(fc+hd)y). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz da composta $T \circ S$ é $\begin{bmatrix} ea+gb & ec+gd \\ fa+hb & fc+hd \end{bmatrix}$.

Como $\begin{bmatrix} ea+gb & ec+gd \\ fa+hb & fc+hd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, segue a

Proposição 1. *Se $S,T : V \to V$ são transformações lineares, então $[T \circ S] = [T] \cdot [S]$.*

Exemplo 2. *Se $S(x,y) = (3x-2y,5x+y)$ e $T(x,y) = (2x-y,4x+7y)$, podemos obter $T \circ S$ calculando o produto $[T] \cdot [S]$:*

$$\begin{aligned} [T] \cdot [S] &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 47 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, $(T \circ S)(x,y) = (x-5y,47x-y)$.

Observação 3. *Como a multiplicação de matrizes é não-comutativa, o mesmo ocorre com a composição de transformações lineares: $T \circ S \neq S \circ T$, em geral. Por exemplo, sejam $S,T : V \to V$ dadas por $S(x,y) = (x,x)$ e $T(x,y) = (x,0)$. Temos $T \circ S = T \neq S = S \circ T$.*

Diremos que uma matriz A é *escalar* se $A = k \cdot I$, para algum número real k, em que I é a matriz identidade 2×2. De outro modo, uma matriz é dita escalar se for do tipo

$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$. Perceba que uma aplicação linear é uma homotetia se, e só se, a sua matriz é escalar e não-nula.

Se ocorrer $T \circ S = S \circ T$, diremos que S e T *comutam.* Além da aplicação identicamente nula, as únicas transformações lineares que comutam com qualquer outra transformação linear são as homotetias. Pela Proposição (1), essa afirmação equivale ao seguinte resultado.

Proposição 4. *Considere uma matriz* 2×2 A*. Se* $AB = BA$ *para qualquer matriz* 2×2 B*, então* A *é uma matriz escalar. Reciprocamente, se* A *é escalar então* $AB = BA$ *para toda matriz* B*.*

Demonstração. É fácil ver que, caso A seja uma matriz escalar, vale $AB = BA$ para toda matriz B.

Reciprocamente, suponhamos que $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ comuta com qualquer matriz 2×2. Tomando $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, vale $AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, $AB = BA \Rightarrow b = c = 0$. Se agora $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, vem $AB = \begin{bmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{bmatrix}$. Pela hipótese, segue que $a = d$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ é uma matriz escalar. $\square$

Uma outra diferença significativa entre a multiplicação de matrizes (ou de aplicações lineares) e a multiplicação de números reais é a ausência da lei do corte para a primeira: dadas as matrizes A,B e C, a igualdade $AB = AC$ pode ocorrer mesmo que se tenha $A \neq 0$ e $B \neq C$. É possível até que A^2 seja uma matriz nula ainda que A não o seja. O ponto é que nem toda matriz não nula possui inversa.

Vamos agora caracterizar as aplicações lineares T tais que T^n é a aplicação nula para algum $n \in \mathbb{N}$, em que $T^n := T \circ T \circ \cdots \circ T$ com n fatores no 2º membro. Para tal, convém definir duas funções importantes.

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ definimos o seu *traço*, $\operatorname{tr} A$, como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja, $\operatorname{tr} A = a + d$. Por exemplo, $\operatorname{tr} I = 2$, ao passo que $\operatorname{tr}[S] = 0$, se S é uma reflexão.

Alguns fatos úteis sobre traços:

1. $\operatorname{tr}(k \cdot A) = k \cdot \operatorname{tr} A$.

2. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.

3. $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$,

para quaisquer matrizes A e B e para cada número real k.

Dada uma aplicação linear $T : V \to V$ definimos o *traço* de T, $\operatorname{tr} T$, e o *determinante* de T, $\det T$, como o traço e o determinante de uma matriz qualquer de T, respectivamente: $\operatorname{tr} T = \operatorname{tr}[T]$, $\det T = \det[T]$. É claro que precisamos verificar que essas definições não dependem do sistema de coordenadas. Mas, como visto na aula anterior, dadas as matrizes $[T]$ e $[T]'$ da transformação linear T, existe uma matriz ortogonal $[R_\theta]$ tal que $[T]' = [R_{-\theta}] \cdot [T] \cdot [R_\theta]$. Logo, pela propriedade 3 da função traço mencionada acima, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[T]' &= \operatorname{tr}([R_{-\theta}] \cdot [T]) \cdot [R_\theta] \\ &= \operatorname{tr}([R_\theta] \cdot [R_{-\theta}]) \cdot [T] \\ &= \operatorname{tr}[R_\theta \circ R_{-\theta}] \cdot [T] \\ &= \operatorname{tr}[T]. \end{aligned}$$

Quanto ao determinante, basta repetir os mesmos passos acima pois $\det AB = \det A \det B = \det BA$.

Observe que as funções $T \mapsto \operatorname{tr} T$ e $T \mapsto \det T$ têm as mesmas propriedades já enunciadas para as suas versões matriciais.

Com um cálculo direto verificamos a seguinte igualdade

$$A^2 = (\operatorname{tr} A) \cdot A - (\det A) \cdot I, \tag{1}$$

para qualquer matriz A. Equivalentemente

Proposição 5. *Para qualquer transformação linear T, vale*

$$T^2 = (trT) \cdot T - (\det T) \cdot Id.$$

Corolário 6. *$T^n = 0$ para algum inteiro positivo n se, e só se, $trT = 0$ e $\det T = 0$.*

Demonstração. Se $\operatorname{tr} T = 0$ e $\det T = 0$ então $T^2 = 0$ pela proposição anterior. Reciprocamente, suponhamos $T^n = 0$ para algum inteiro positivo n. A conclusão é imediata caso T seja nulo, de forma que podemos supor $T \not\equiv 0$, e daí $n \geq 2$. Como $(\det T)^n = \det T^n = \det 0 = 0$, vem $\det T = 0$. Pela proposição anterior, $T^2 = (\operatorname{tr} T) \cdot T$, $T^3 = (\operatorname{tr} T)^2 \cdot T$ e, mais geralmente, $T^m = (\operatorname{tr} T)^{m-1} \cdot T$ para cada natural m (por indução matemática). Tomando $m = n$, vemos que $0 = (\operatorname{tr} T)^{n-1} \cdot T$, de onde se conclui que $\operatorname{tr} T = 0$, como queríamos. □

Observação 7.

i) *Note que $T^n = 0$ para algum n se, e só se, $T^2 = 0$.*

ii) *Como sugerido na demonstração do corolário acima, é simples calcular potências de matrizes 2×2 com determinante nulo. Se A é uma matriz 2×2 e $\det A = 0$, segue de (1) que $A^m = (tr A)^{m-1} \cdot A$ para cada natural m.*

Tendo estudado a equação matricial $X^2 = 0$, é natural agora se perguntar sobre as soluções de $X^2 = A$, caso existam. Se $X_0^2 = A$, então $\det A = (\det X_0)^2 \geq 0$. Além disso, de acordo com (1), vale $X_0^2 = (\operatorname{tr} X_0) \cdot X_0 \mp (\sqrt{\det A}) \cdot I = A$. Aplicando a função traço em ambos os membros da igualdade

$$(\operatorname{tr} X_0) \cdot X_0 = \pm(\sqrt{\det A}) \cdot I + A, \tag{2}$$

vem

$$(\operatorname{tr} X_0)^2 = \pm 2\sqrt{\det A} + \operatorname{tr} A, \tag{3}$$

de onde segue que $2\sqrt{\det A} + \operatorname{tr} A \geq 0$. Por outro lado, se $\det A \geq 0$ e $2\sqrt{\det A} + \operatorname{tr} A > 0$, as fórmulas (2) e (3) nos sugerem que

$$X_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\det A} + \operatorname{tr} A}} \cdot [A + (\sqrt{\det A}) \cdot I], \tag{4}$$

é uma solução de $X^2 = A$. Com efeito,

$$\begin{aligned} X_0^2 &= \frac{1}{2\sqrt{\det A} + \operatorname{tr} A} \cdot [A^2 + (2\sqrt{\det A}) \cdot A + (\det A) \cdot I] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det A} + \operatorname{tr} A} (2\sqrt{\det A} + \operatorname{tr} A) \cdot A \\ &= A. \end{aligned}$$

3 Decomposição polar

Existe uma cópia em M_2 do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Basta associar a cada complexo $z = a + ib$ a matriz $A_z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. A identificação $\mathbb{C} \ni z \mapsto A_z \in M_2$ preserva adição e multiplicação. A forma polar $z = r \operatorname{cis} \theta$ equivale a fatorar a matriz A_z como o produto de uma matriz escalar e uma matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

A próxima proposição nos mostra que toda matriz se fatora de maneira similar a (5), em que a matriz escalar é substituída por uma matriz simétrica.

Teorema 8. *Se A é uma matriz 2×2, existe uma matriz simétrica S e uma matriz de rotação R tais que $A = SR$.*

Demonstração. Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Para cada θ considere $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (a matriz da rotação de ângulo θ). Precisamos determinar um ângulo θ de modo que $AR_{-\theta}$ seja uma matriz simétrica. Ora, temos

$$AR_{-\theta} = \begin{bmatrix} a\cos\theta - c\operatorname{sen}\theta & a\operatorname{sen}\theta + c\cos\theta \\ b\cos\theta - d\operatorname{sen}\theta & b\operatorname{sen}\theta + d\cos\theta \end{bmatrix},$$

e queremos $a\operatorname{sen}\theta + c\cos\theta = b\cos\theta - d\operatorname{sen}\theta$, ou equivalentemente, $(a+d)\operatorname{sen}\theta = (b-c)\cos\theta$. Se $a+d=0$, escolhemos $\theta = 90°$. Se $a+d \neq 0$, existe um único ângulo $0 \leq \theta < 180°$ tal que $\operatorname{tg}\theta = \frac{b-c}{a+d}$, o que equivale a $(a+d)\operatorname{sen}\theta = (b-c)\cos\theta$. Logo, sempre há uma escolha de θ que torna $S = AR_{-\theta}$ uma matriz simétrica. Com essa escolha, temos $A = SR_\theta$ como desejado. □

Uma fatoração da forma $A = SR$, como no teorema anterior, chama-se uma *decomposição polar* para a matriz A.

Exemplo 9. *Se* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$*, os cálculos desenvolvidos na demonstração do teorema acima nos dão a decomposição polar*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Corolário 10. *Dada uma transformação linear T, existe uma aplicação simétrica S e uma rotação R_θ tais que $T = S \circ R_\theta$.*

Em nossa próxima aula, apresentaremos uma outra demonstração do Teorema (8) utilizando a relação (4).

4 Uma aplicação

Nesta seção consideraremos aplicações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com determinante não nulo. Nesse caso, $u \neq 0 \Rightarrow T(u) \neq 0$. Com efeito, $T(u) = 0$ equivale a $[T] \cdot [u] = 0$. Como $\det[T] \neq 0$, a única solução do sistema homogêneo $[T]\cdot[u]=0$ é a trivial, ou seja, $[u]=0$ o que nos dá $u=0$. Segue-se que T é injetiva: $T(u)=T(v)\Rightarrow T(u-v)=0\Rightarrow u-v=0\Rightarrow u=v$. Uma segunda observação é que tais aplicações transformam retas em retas. De fato, T transforma a reta de equação vetorial $u+tv, t\in\mathbb{R}$, na reta de equação vetorial $T(u)+tT(v), t\in\mathbb{R}$. Mais interessante ainda é o próximo resultado.

Proposição 11. *Toda transformação linear com determinante não nulo transforma elipses em elipses.*

Demonstração. Seja T uma transformação linear satisfazendo $\det T\neq 0$. Primeiro vamos provar que T transforma circunferências em elipses. Utilizando a decomposição polar, podemos escrever $T=S\circ R_\theta$, em que S é simétrica e $\det S\neq 0$. Se $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^2$ é uma circunferência, certamente $\mathcal{C}'=R_\theta(\mathcal{C})$ também o é, pois rotações são isometrias. Como $T(\mathcal{C})=S(\mathcal{C}')$, basta mostrar que $S(\mathcal{C}')$ é uma elipse. Para isso, utilizaremos um sistema de coordenadas no qual S se expressa como $S(x,y)=(ax,by)$ (Teorema 13 da aula passada). Como $\det S\neq 0$, temos $a,b\neq 0$. Se a equação de $\mathcal{C}'$ é $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, então os pares $(x,y)\in\mathcal{C}'$ se transformam por S em pares (z,w) tais que $x=\frac{z}{a}$ e $y=\frac{w}{b}$. Portanto, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ equivale a $(\frac{z}{a}-x_0)^2+(\frac{w}{b}-y_0)^2=R^2$, ou ainda, $\frac{(z-ax_0)^2}{(aR)^2}+\frac{(w-by_0)^2}{(bR)^2}=1$, que é a equação de uma elipse $\mathcal{E}$, ou seja, $S(\mathcal{C}')=\mathcal{E}$, como queríamos.

Para o caso geral, seja $\mathcal{E}$ uma elipse. Os argumentos anteriores nos mostram que existe uma transformação linear simétrica S, com $\det S\neq 0$, e uma circunferência $\mathcal{C}'$ tais que $S(\mathcal{C}')=\mathcal{E}$. Como a composta $T\circ S$ satisfaz $\det(T\circ S)=\det T\det S\neq 0$, o primeiro caso nos garante que $(T\circ S)(\mathcal{C}')=T(\mathcal{E})$ deve ser uma elipse. $\square$

De acordo com a demonstração da proposição acima, se $\mathcal{E}$ é uma elipse, existe uma aplicação linear simétrica S, com $\det S\neq 0$, e uma circunferência $\mathcal{C}'$ tais que $S(\mathcal{C}')=\mathcal{E}$. Diremos que $(S,\mathcal{C}')$ é um *par auxiliar* para $\mathcal{E}$. Nesse caso, veremos agora que, sendo a excentricidade de $\mathcal{E}$ positiva, S transforma duas retas perpendiculares r e r' em retas perpendiculares se, e somente se, as direções das retas r e r' forem as direções dos eixos da elipse $\mathcal{E}$ (esse fato será útil na prova do próximo teorema). Com efeito, vimos na demonstração anterior que um sistema de coordenadas em que S se expressa como $S(x,y) = (ax,by)$ tem os seus eixos nas direções dos eixos da elipse $\mathcal{E}$. Se $r : u + tv$ e $r' : u' + tv'$, as retas $S(r)$ e $S(r')$ admitem $S(v)$ e $S(v')$ como vetores diretores, respectivamente. Escrevendo $v = (c,d)$ e $v' = (c',d')$, o estudo que fizemos sobre produto interno de vetores na aula passada nos permite expressar as condições $v \perp v'$ e $S(v) \perp S(v')$ como $cc' + dd' = 0$ e $a^2cc' + b^2dd' = 0$. Dessas igualdades chega-se na relação $(a^2 - b^2)cc' = 0$. Como a excentricidade de $\mathcal{E}$ é positiva, temos $a^2 \neq b^2$, e daí segue-se que $c = 0$ ou $c' = 0$. Se, digamos, $c' = 0$, então $d = 0$ e $v = (c,0), v' = (0,d')$ têm as direções dos eixos de $\mathcal{E}$. Deixaremos a verificação da recíproca como um exercício.

Uma última observação: caso S transforme as retas perpendiculares r, r' nas retas perpendiculares $S(r), S(r')$, valerá $r//S(r)$ e $r'//S(r')$, pelos argumentos do parágrafo anterior. Em particular, $S(r)$ e $S(r')$ também têm as direções dos eixos da elipse $\mathcal{E}$.

Vamos recordar o Lema 7 da aula anterior: os vetores $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ são não-colineares se, e só se, $\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$.

Lema 12. *Sejam u e v vetores não-colineares. Então, dados quaisquer vetores u' e v', existe uma única transformação linear $T : V \to V$ satisfazendo $T(u) = u'$ e $T(v) = v'$.*

Demonstração. Sejam $u = (a,b), v = (c,d), u' = (a',b')$ e $v' = (c',d')$. Existirá uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo $T(u) = u'$ e $T(v) = v'$ se, e só se, os sistemas lineares 2×2

$$\begin{cases} ax + bz = a' \\ cx + dz = c' \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} ay + bw = b' \\ cy + dw = d', \end{cases}$$

forem possíveis e determinados, sendo $\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ a matriz de T. Mas esse é o caso, pois a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ daqueles sistemas tem determinante não nulo. $\square$

Observação 13.

i) *Nas notações do lema anterior (e da sua demonstração), vale* $\det T \neq 0$ *se, e somente se,* u' *e* v' *são não-colineares. De fato, temos* $\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, *de onde segue a igualdade* $\det T = (a'd' - b'c')/(ad - bc)$. *Logo,* $\det T \neq 0 \Leftrightarrow a'd' - b'c' = \begin{vmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow u'$ *e* v' *são não-colineares.*

ii) *Qualquer conjunto* ordenado $\mathfrak{B} = \{u,v\}$ *de vetores não-colineares* u *e* v *chama-se uma* base *de* V*. Nesse caso, todo vetor* $w \in V$ *se escreve, de modo único, como* $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$*. Os números reais* α *e* β *chamam-se* coordenadas do vetor w relativamente à base $\mathfrak{B}$*. Escreveremos* $[w]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$*. Dessa forma, qualquer transformação linear* $T : V \to V$ *induz uma única matriz* $[T]_{\mathfrak{B}} := \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}$, *determinada pelas condições* $T(u) = e \cdot u + f \cdot v, T(v) = g \cdot u + h \cdot v$*.* $[T]_{\mathfrak{B}}$ *é chamada de* matriz de T relativamente à base $\mathfrak{B}$ *e caracteriza-se por* $[T(w)]_{\mathfrak{B}} = [T]_{\mathfrak{B}} \cdot [w]_{\mathfrak{B}}$, *para cada vetor* $w \in V$*. O lema anterior nos garante que a correspondência* $T \mapsto [T]_{\mathfrak{B}}$ *é uma bijeção entre o espaço das transformações lineares de* V *e o espaço das matrizes* 2×2*. Como antes, tal correspondência preserva o produto por escalar, a adição e a multiplicação.*

Eis a nossa aplicação.

Teorema 14. *Dado um triângulo, existe uma única elipse incrita nesse triângulo tangenciando os lados em seus pontos médios.*

A elipse mencionada no teorema chama-se *elipse inscrita de Steiner* do triângulo.

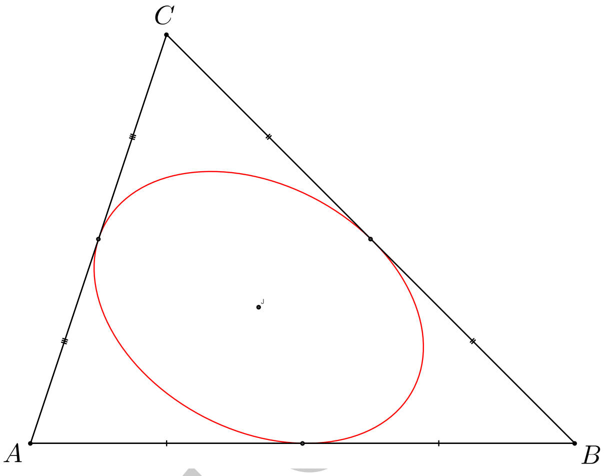

Figura 1: A elipse inscrita de Steiner de ABC.

Demonstração do Teorema 14. Dado um triângulo ABC, fixe um triângulo equilátero $A'B'C'$ com centro em G, o baricentro de ABC. Considerando um sistema de coordenadas centrado em G, sejam $u = \overrightarrow{GA'}$,$v = \overrightarrow{GB'}$,$u' = \overrightarrow{GA}$ e $v' = \overrightarrow{GB}$. Se T é a transformação linear satisfazendo $T(u) = u'$ e $T(v) = v'$ (Lema (12)), afirmamos que T transforma $A'B'C'$ em ABC (cada ponto P do plano é identificado com o vetor $\overrightarrow{GP}$). Só precisamos mostrar que T aplica C' em C, ou seja, $T(\overrightarrow{GC'}) = \overrightarrow{GC}$. Sendo G o baricentro de $A'B'C'$, vale $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0$. Aplicando T em ambos os membros dessa igualdade, vem $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + T(\overrightarrow{GC'}) = 0$. Mas, como G também é o baricentro de ABC, a igualdade anterior juntamente com a relação $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ nos levam a $T(\overrightarrow{GC'}) = \overrightarrow{GC}$, como desejado. Veja que $\det T \neq 0$, pois u' e v' são não-colineares. Das observações anteriores e da Proposição (11), vemos que T transforma o incírculo de $A'B'C'$ numa elipse $\mathcal{E}$ incrita em ABC. Mais ainda, como transformações lineares preservam ponto médio e o incírculo de um triângulo equilátero tangencia os lados nos pontos médios, a elipse $\mathcal{E}$ também tangencia os lados de ABC em seus pontos médios. Isso mostra a existência da elipse inscrita de Steiner.

Agora devemos estabelecer a unicidade. Seja $\mathcal{F}$ uma elipse inscrita em ABC tangenciando os lados nos pontos médios. *Afirmação*: existe uma elipse E, tangenciando os lados de $A'B'C'$ nos pontos médios, tal que $T(E) = \mathcal{F}$.
Essa afirmação é uma consequência do seguinte resultado da próxima aula: *toda transformação linear com determinante não-nulo é invertível e a sua inversa ainda é linear*. Por esse resultado e a Proposição (11), $T^{-1}(\mathcal{F}) = E$ é uma elipse com as propriedades desejadas.

Com aquela afirmação em mente, basta provar agora que E é o incírculo de $A'B'C'$, pois então $\mathcal{F} = T(E) = \mathcal{E}$. Portanto, devemos mostrar que a excentricidade de E é nula. Por contradição, suponha que E tenha excentricidade positiva. Ora, se M,N e P são os pontos médios dos lados de $A'B'C'$, o lema abaixo nos diz que as retas $\overleftrightarrow{MN}$,$\overleftrightarrow{NP}$ e $\overleftrightarrow{PM}$ têm as direções dos eixos de E, o que é impossível já que duas quaisquer dessas retas são não-perpendiculares. Com isso encerramos a demonstração. $\square$

Lema 15. *Seja E uma elipse de excentricidade positiva. Se os segmentos PM e PN, tangentes a E em M e N, têm mesmo comprimento, então a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é paralela a um dos eixos de E.*

Demonstração. Seja $(S,\mathcal{C}')$ um par auxiliar para E. Se $M',N' \in \mathcal{C}'$ são tais que $S(M') = M, S(N') = N$, as tangentes a $\mathcal{C}'$ nos pontos M',N' são transformadas por S nas tangentes $\overleftrightarrow{MP}$ e $\overleftrightarrow{NP}$. Em particular, aquelas tangentes a $\mathcal{C}'$ se encontram num ponto P' satisfazendo $S(P') = P$. Como

$\overline{P'M'} = \overline{P'N'}$, a mediatriz do segmento $M'N'$ é a reta $\overleftrightarrow{P'Q'}$, sendo Q' o ponto médio de $M'N'$. Lembrando que transformações lineares preservam ponto médio, a reta $\overleftrightarrow{P'Q'}$ será transformada por S na reta $\overleftrightarrow{PQ}$, em que Q é o ponto médio do segmento MN. Mas, sendo $\overline{PM} = \overline{PN}$, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de MN. Logo, S transforma as retas perpendiculares $\overleftrightarrow{M'N'}$ e $\overleftrightarrow{P'Q'}$ nas retas perpendiculares $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$. Pelas observações anteriores, a reta $\overleftrightarrow{MN}$ tem a direção de um dos eixos de E. $\square$

Observação 16.

i) *Se $\mathcal{E}$ é uma elipse e T é uma transformação linear com determinante não-nulo, uma análise da demonstração da Proposição* (11) *nos revela que T aplica o centro de $\mathcal{E}$ no centro da elipse $T(\mathcal{E})$. Portanto, segue da demonstração do Teorema* (14) *que o centro da elipse de Steiner de ABC é o baricentro de ABC.*

ii) *Há também uma única elipse centrada no baricentro de ABC passando pelos vértices desse triângulo, a chamada* elipse circunscrita de Steiner de ABC. *Nas notações da demonstração do Teorema* (14), *o circuncírculo $\mathcal{C}''$ de $A'B'C'$ é a imagem do incírculo $\mathcal{C}'$ de $A'B'C'$ pela homotetia T_2 de razão 2. Como $T_2 \circ T = T \circ T_2$, temos $T_2(T(\mathcal{C}')) = T(T_2(\mathcal{C}'))$, ou seja, $T_2(\mathcal{E}) = T(\mathcal{C}'')$. Concluímos que a elipse circunscrita de Steiner é a imagem da elipse inscrita de Steiner pela homotetia de razão 2 centrada no baricentro.*

Dicas para o Professor

Por meio da observação anterior, podemos "construir" a elipse inscrita de Steiner de um triângulo ABC utilizando o software *Geogebra* seguindo os passos abaixo:

1. Determine os pontos médios M,N e P dos lados de ABC.

2. Construa o baricentro G de ABC.

3. Determine os pontos médios X e Y dos segmentos AG e BG.

4. Produza a cônica $\mathcal{E}$ passando pelos pontos M,N,P,X e Y.

$\mathcal{E}$ é a elipse inscrita de Steiner.

Para um estudo das relações entre cônicas e triângulos, [3] é uma excelente referência.

Vale a pena mencionar que a relação expressa na Proposição (1) motivou a definição de produto de matrizes. Essa definição se deve ao matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (veja [4]).

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

2. E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

3. A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky. *Geometry of Conics*. AMS. 2007.

4. When was Matrix Multiplication invented? https://people.math.harvard.edu/ knill/history/matrix/