Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Cotangente, Cossecante e Secante
Parte 3

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de fevereiro de 2025

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, vamos apresentar uma série de problemas que envolvem as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Para resolver tais problemas, além de utilizar as definições e as propriedades dessas funções, lançaremos mão das fórmulas que foram deduzidas no módulo anterior.

Podemos utilizar as fórmulas que envolvem o seno, o cosseno e a tangente de um arco para deduzir fórmulas correspondentes envolvendo a cossecante, a secante e a cotangente desse arco; entretanto, em $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{k\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\}$, podemos calcular os inversos da cossecante, da secante e da cotangente de um arco para obter o seno, cosseno e tangente desse arco, usar fórmulas para tais funções e, depois, calcular novamente inversos para voltar à cossecante, secante e cotangente do arco. Assim, não se faz necessário deduzir fórmulas adicionais.

Exemplos

Exemplo 1 (FEI). *Se* $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, *for tal que* $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = 3$, *então* $\operatorname{sen} 2x$ *será igual a:*

(a) $\frac{1}{3}$.

(b) $\frac{3}{2}$.

(c) 3.

(d) $\frac{2}{3}$.

(e) *nda.*

Solução. Sabemos que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Logo,

$$\begin{aligned} &\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = 3 \iff \\ \iff &\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 3 \\ \iff &\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} = 3 \\ \iff &\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 3 \operatorname{sen} x \cos x \\ \iff &1 = 3 \operatorname{sen} x \cos x. \end{aligned}$$

Daí, segue que $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{3}$. Agora, invocando a fórmula para o seno do arco duplo,

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$

obtemos

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(d)**. $\square$

Exemplo 2 (FUVEST). *Assinale a alternativa que corresponde ao valor de* $(\operatorname{tg} 10° + \operatorname{cotg} 10°) \cdot \operatorname{sen} 20°$*:*

(a) $\frac{1}{2}$.

(b) 1.

(c) 2.

(d) $\frac{5}{2}$.

(e) 4.

Solução. Temos que $\operatorname{tg} 10° = \frac{\operatorname{sen} 10°}{\cos 10°}$, $\operatorname{cotg} 10° = \frac{\cos 10°}{\operatorname{sen} 10°}$ e $\operatorname{sen} 20° = \operatorname{sen}(2 \cdot 10°) = 2 \operatorname{sen} 10° \cos 10°$. Logo,

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{tg} 10° + \operatorname{cotg} 10°) \cdot \operatorname{sen} 20° = \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen} 10°}{\cos 10°} + \frac{\cos 10°}{\operatorname{sen} 10°}\right) \cdot 2 \operatorname{sen} 10° \cos 10° \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 10° + \cos^2 10°}{\cancel{\cos 10° \operatorname{sen} 10°}}\right) \cdot 2\cancel{\operatorname{sen} 10° \cos 10°} \\
&= \left(\operatorname{sen}^2 10° + \cos^2 10°\right) \cdot 2 \\
&= 1 \cdot 2 = 2.
\end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**. $\square$

Exemplo 3 (UFSM). *Seja* $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi + x) + \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{cotg} x}.$$

Sabendo-se que $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ *com* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, *então* $f(\theta)$ *é igual a:*

(a) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

(b) $\frac{2}{7}$.

(c) $\frac{7}{2}$.

(d) 1.

(e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solução. Vamos utilizar a identidade $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, juntamente com o fato de que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, para encontrar o valor de $\cos\theta$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\\ &= 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.\end{aligned}$$

Uma vez que $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta > 0$, obtemos $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Agora, o cálculo acima dá

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

e

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = \operatorname{sen}\pi\cos\theta + \cos\pi\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta$$

e

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \frac{\operatorname{sen}(\pi+\theta) + \operatorname{tg}\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\operatorname{cotg}\theta}\\ &= \frac{-\cancel{\operatorname{sen}\theta} + \operatorname{tg}\theta + \cancel{\operatorname{sen}\theta}}{\operatorname{cotg}\theta}\\ &= \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{cotg}\theta}.\end{aligned}$$

Logo,

$$f(\theta)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{2}{7}.$$

Desse modo, a alternativa correta é a da letra **(b)**. $\square$

Exemplo 4 (ITA). *Se* $\cos(2x)=\dfrac{1}{2}$, *assinale a alternativa que corresponde a um possível valor para*

$$\frac{\operatorname{cotg} x-1}{\operatorname{cosec}(x-\pi)-\sec(\pi-x)}.$$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) 1.

(c) $\sqrt{2}$.

(d) $\sqrt{3}$.

(e) 2.

Solução. Utilizando uma das fórmulas para o cosseno do arco duplo, temos que

$$\begin{aligned}\cos(2x)=\frac{1}{2}&\iff 2\cos^2 x-1=\frac{1}{2}\\&\iff 2\cos^2 x=\frac{3}{2}\\&\iff \cos^2 x=\frac{3}{4}\\&\iff \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{ou}\quad \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Em particular, $x\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Por outro lado, temos

$$\operatorname{cotg} x-1=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-1=\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}.$$

Além disso, argumentando como na solução do exemplo anterior, temos

$$\operatorname{sen}(\pi-x)=-\operatorname{sen} x\quad\text{e}\quad\cos(\pi-x)=-\cos x,$$

de modo que

$$\operatorname{cosec}(x-\pi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

e

$$\sec(x-\pi) = \frac{1}{\cos(\pi - x)} = \frac{1}{-\cos x} = -\frac{1}{\cos x}.$$

Juntando as informações acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cosec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)} = \\
&= \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}} \\
&= \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}} \\
&= \frac{-\cancel{(\operatorname{sen} x - \cos x)}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{\cancel{\operatorname{sen} x} \cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x - \cos x}} \\
&= -\cos x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cosec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)} = -\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. □

Exemplo 5 (IME). *Seja*

$$S = (1 + \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha)(1 + \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha).$$

Mostre que S é inteiro para todo $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, e calcule o seu valor.

Solução. Para simplificar a notação, denotaremos $a = \operatorname{sen}\alpha$ e $b = \cos\alpha$. Veja que a e b são ambos não nulos, pois $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, e

$$a^2 + b^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Então

$$\begin{aligned}
S &= (1+\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)(1+\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)\\
&= \left(1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\\
&= \left(1+\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\right)\\
&= \left(\frac{b+a+1}{b}\right)\left(\frac{a+b-1}{a}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando os dois fatores acima e substituindo $a^2+b^2=1$, obtemos

$$\begin{aligned}
S &= \frac{ab+b^2-\cancel{b}+a^2+ab-\cancel{a}+\cancel{a}+\cancel{b}-1}{ab}\\
&= \frac{2ab+a^2+b^2-1}{ab}\\
&= \frac{2ab}{ab}=2.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 6. *Seja ABC um triângulo tal que*

$$2\operatorname{sen}\widehat{A}-\operatorname{sen}\widehat{B}-\operatorname{sen}\widehat{C}=0.$$

Prove que o valor de $\operatorname{cotg}\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$ *é um número inteiro e o determine.*

Solução. Vamos denotar $\widehat{A}=a$, $\widehat{B}=b$ e $\widehat{C}=c$. Como $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são ângulos internos de um triângulo, temos

$$a+b+c=\pi.$$

Por hipótese, temos

$$2\operatorname{sen}a=\operatorname{sen}b+\operatorname{sen}c;$$

logo, utilizando a fórmula para o seno do arco duplo e o fato de que $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(\pi - a)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 2\operatorname{sen} a &= 2\operatorname{sen}(\pi - a)\\
&= 2\operatorname{sen}(b+c) = 2\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{b+c}{2}\right)\\
&= 2\cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)\\
&= 4\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{b+c}{2}\right).
\end{aligned}$$

Além disso, utilizando uma das fórmulas de transformação em produto, obtemos

$$\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 2\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{b-c}{2}\right).$$

Comparando os dois valores obtidos acima para $\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c$, concluímos que

$$4\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{b+c}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{b-c}{2}\right).$$

Observando que $\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}\right) \neq 0$ (uma vez que $\frac{b+c}{2} = \frac{\pi-a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), ficamos com

$$2\cos\left(\frac{b+c}{2}\right) = \cos\left(\frac{b-c}{2}\right).$$

Agora, utilizando as fórmulas para o cosseno da soma e da diferença, obtemos

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{b+c}{2}\right) &= 2\cos\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{c}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{b-c}{2}\right) &= \cos\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{c}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$2\cos\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{c}{2}\right)-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{c}{2}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{c}{2}\right)+\mathrm{sen}\left(\frac{b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{c}{2}\right),$$

de onde

$$\cos\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{c}{2}\right)=3\,\mathrm{sen}\left(\frac{b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{c}{2}\right).$$

Finalmente, dividindo os dois membros da última igualdade por $\mathrm{sen}\left(\frac{b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{c}{2}\right)$, chegamos a

$$\mathrm{cotg}\left(\frac{b}{2}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{c}{2}\right)=3,$$

que é inteiro. □

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50 minutos para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que o professor faça uma pequena revisão sobre as fórmulas de adição e transformação em produto apresentadas anteriormente, as quais são bastante utilizadas ao longo deste material. Sempre que um problema envolver as funções tangente, cossecante, secante ou cotangente, é importante ressaltar os números reais para os quais essas funções não estão definidas, valores estes que devem ser descartados.

A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria; a referência [1] coleciona dezenas de aplicações interessantes da Trigonometria à Geometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2022.

2 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.