Material Teórico - Módulo Elementos básicos de geometria plana - Parte 3

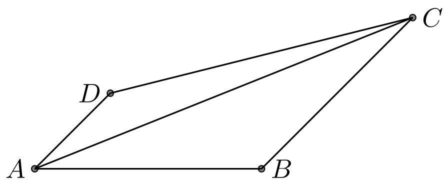
Quadriláteros

Oitavo ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Jocelino Sato
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Quadriláteros

Recordamos que um quadrilátero é um polígono de quatro lados. Nele, dois lados que não se intersectam são chamados de *opostos*; por outro lado, dois ângulos são ditos *opostos* se não têm um lado do quadrilátero em comum. Como ocorre com todo polígono convexo, as diagonais de todo *quadrilátero convexo*[1] sempre estão contidas na região do plano limitada pelo quadrilátero. De fato, se $ABCD$ é um quadrilátero convexo, então sua diagonal $\overline{AC}$ é tal que todo ponto P entre A e C está no interior de ambos os ângulos $\angle BAD$ e $\angle BCD$, de forma que o segmento $\overline{AC}$ menos suas extremidades está contido no interior do quadrilátero; evidentemente, um raciocínio análogo é válido para a diagonal $\overline{BD}$. Logo, toda diagonal de um quadrilátero convexo o decompõe em dois triângulos e, consequentemente, *a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é igual a* $360°$.

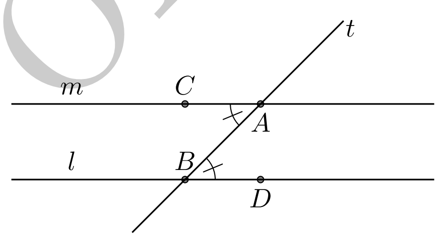


Um quadrilátero convexo e sua diagonal $\overline{AC}$.

Neste material, estudamos alguns tipos particulares de quadriláteros convexos, a saber, trapézios, paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados, os quais serão definidos pela imposição de restrições sobre os lados e/ou ângulos do quadrilátero. Por vezes, nos referiremos genericamente a tais quadriláteros dizendo que se tratam de *quadriláteros notáveis*.

No estudo das propriedades dos quadriláteros notáveis, bem como no estabelecimento de condições suficientes para que um quadrilátero seja notável (caracterização), dois resultados já enunciados serão muito utilizados. O primeiro, que recordamos a seguir, é conhecido como o *Teorema dos Ângulos Alternos-Internos* (abreviaremos *Teorema AAI*).

Teorema 1 (dos Ângulos Alternos-Internos)**.** *Sejam duas retas cortadas por uma transversal comum. Se um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.*

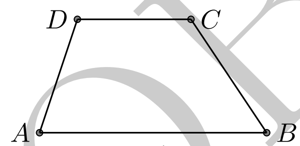


[1] A noção de polígono convexo pode ser recordada no Módulo: Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1: Polígonos convexos.

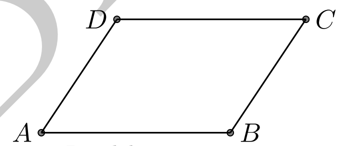
O segundo é seu recíproco, sendo que este é uma afirmação que só pode ser provada mediante o uso do Postulado das Paralelas ou quinto Postulado de Euclides.

Teorema 2 (Recíproco do Teorema dos Ângulos Alternos-Internos)**.** *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os pares de ângulos alternos e internos são formados por ângulos congruentes entre si.*

Neste material, estudaremos apenas trapézios e paralelogramos. Um **trapézio** é um quadrilátero que tem pelo menos um par de lados opostos paralelos. Um **paralelogramo** é um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos são paralelos. Em um trapézio, os lados paralelos são denominados **bases do trapézio** e, quando eles não tiverem o mesmo comprimento, o maior é denominado **base maior** e o menor é denominado **base menor** do trapézio.

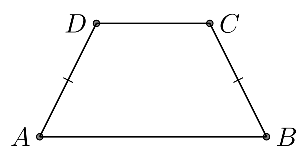


Trapézio

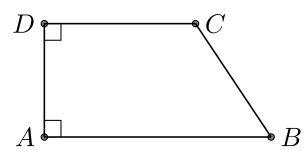


Paralelograma

Evidentemente, **todo paralelogramo é, em particular, um trapézio**. Da mesma forma, é claro que existem trapézios que não são paralelogramos. Alguns trapézios recebem nomes especiais. Por exemplo, um trapézio é dito **isósceles** se tem um par de lados opostos não paralelos e de mesmo comprimento, e é dito **retângulo** se pelo menos dois ângulos internos consecutivos forem retos.



Trapézio isósceles



Trapézio retângulo

O resultado a seguir reúne algumas propriedades importantes de trapézios isósceles.

Teorema 3. *Seja $ABCD$ um trapézio isósceles de base maior $\overline{AB}$ e base menor $\overline{CD}$, e seja P a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Temos que:*

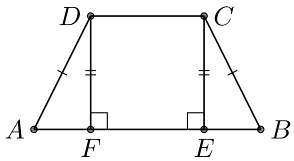
(a) os ângulos da base maior, $\angle DAB$ e $\angle CBA$, são congruentes, e o mesmo ocorre com os ângulos da base menor, $\angle ADC$ e $\angle BCD$;

(b) as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes;

(c) o triângulo ABP é isósceles de base $\overline{AB}$ e o triângulo CDP é isósceles de base $\overline{CD}$;

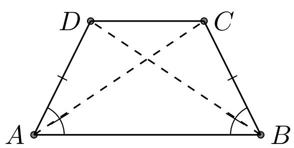
(d) os triângulos APD e BPC são congruentes.

Prova.
(a) Baixe perpendiculares ao lado $\overline{AB}$ pelos pontos C e D, obtendo respectivamente pontos E e F (os pés das perpendiculares) no segmento $\overline{AB}$, tais que os ângulos $A\widehat{F}D$ e $B\widehat{E}C$ são retos e, portanto, congruentes entre si.



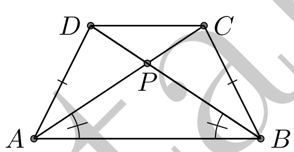
Como $AD = BC$ (uma vez que o trapézio é isósceles) e $CE = DF$ (pois $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas), o critério de congruência cateto-hipotenusa garante a congruência entre os triângulos BCE e ADF. Logo, os ângulos $\angle DAB$ e $\angle CBA$ da base $\overline{AB}$ são congruentes, o mesmo ocorrendo com os ângulos $\angle ADF$ e $\angle BCE$. Como os ângulos $\angle FDC$ e $\angle ECD$ são retos, temos que os os ângulos $\angle ADC$ e $\angle BCD$ da base $\overline{CD}$ também são congruentes.

(b) Mostramos no item (a) que os ângulos $\angle DAB$ e $\angle CBA$ são congruentes.



Assim, segue do critério LAL que os triângulos DAB e CBA são congruentes, sendo os lados correspondentes $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ as diagonais do trapézio.

(c) A congruência dos triângulos DAB e CBA, vista no item (b), diz que $\angle ABD$ e $\angle BAC$ são congruentes.



Usando o recíproco do Teorema do Triângulo Isósceles, concluímos que o triângulo PAB é isósceles de base $\overline{AB}$. Por outro lado, as congruências dos ângulos $\angle ADC$ e $\angle BCD$ e, também, dos ângulos $\angle ADB$ e $\angle BCA$, nos permitem concluir que as medidas dos ângulos $\angle CDB$ e $\angle DCA$ são iguais. Portanto, PDC é um triângulo isósceles de base $\overline{DC}$.

(d) Finalmente, o fato dos triângulos ABP e CDP serem isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, garante que $AP = BP$ e $CP = DP$. Como $AD = BC$ por hipótese, o critério LLL de congruência garante que os triângulos APD e BPC são congruentes. □

A seguir, utilizando a definição de paralelogramo, os critérios de congruência de triângulos e o recíproco do Teorema dos Ângulos Alternos-Internos, mostramos que os paralelogramos têm várias propriedades interessantes.

Teorema 4. *Se um quadrilátero é um paralelogramo, então, necessariamente, temos que:*

(a) cada uma de suas diagonais separa o paralelogramo em dois triângulos congruentes;

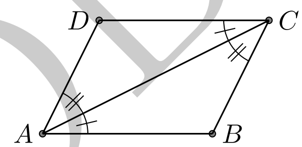
(b) dois lados opostos quaisquer são congruentes;

(c) dois ângulos opostos quaisquer são congruentes;

(d) dois ângulos consecutivos quaisquer são suplementares;

(e) suas diagonais se intersectam num ponto que divide cada uma delas ao meio.

Prova. Seja $ABCD$ um paralelogramo e considere sua diagonal $\overline{AC}$.



O paralelismo de seus lados, juntamente com o recíproco do Teorema AAI, mostram que o par de ângulos alternos-internos $\angle CAB$ e $\angle ACD$, bem como o par $\angle ACB$ e $\angle CAD$, são formados por ângulos congruentes. Logo, pelo critério ALA os triângulos ABC e CDA são congruentes.

Uma vez que um argumento análogo se aplica aos triângulos ABD e CDB, concluímos que eles também são congruentes, e isso termina a prova do item (a).

As congruências estabelecidas no item (a) fornecem, imediatamente, as justificativas para a veracidade dos itens (b) e (c). Observando que a soma dos ângulos internos do paralelogramo é (como em qualquer quadrilátero convexo) sempre igual a $360°$, obtemos também a justificativa do item (d).

Resta-nos demonstrar (e). Para tanto, seja P a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. A congruência entre os triângulos ABC e CDA fornece $P\widehat{A}B = P\widehat{C}D$. Da mesma forma, a congruência entre os triângulos ABD e CDB fornece $P\widehat{B}A = P\widehat{D}C$. Como $AB = CD$, segue por ALA que os triângulos ABP e CDP são também congruentes, de sorte que $PA = PC$ e $PB = PD$. □

A prova do próximo resultado será deixada para o leitor. Como sugestão, observamos que ela é muito parecida com a prova do teorema anterior, em que, basicamente, substituímos o recíproco do Teorema AAI pelo próprio teorema.

Teorema 5. *Se qualquer um dos conjuntos de condições elencados a seguir for satisfeito para um quadrilátero convexo, então tal quadrilátero é um paralelogramo:*

(a) os pares de lados opostos são formados por segmentos congruentes;

(b) os pares de ângulos opostos são formados por ângulos congruentes;

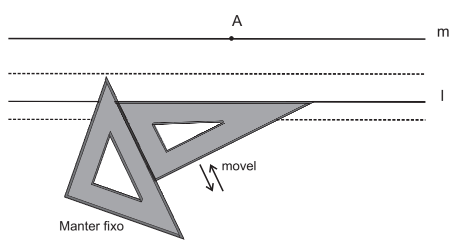
(c) dois lados são paralelos e congruentes;

(d) as diagonais se dividem ao meio.

Este teorema, juntamente com o Teorema 4, fornece várias caracterizações de um paralelogramo. Assim, podemos tomar cada item do Teorema 5 como definição alternativa de paralelogramo, e observamos que seu uso deve ser feito de maneira apropriada a cada situação.

As construções gráficas de retas e segmentos que compõem uma figura no Desenho Técnico quase sempre fazem uso de dois esquadros, cujos ângulos são $45° - 45° - 90°$ e $30° - 60° - 90°$.

A figura abaixo ilustra o traçado de um feixe de paralelas, cuja técnica está baseada no Teorema AAI.



Em particular, com um posicionamento adequado dos esquadros podemos dar uma solução gráfica para o seguinte problema:

> Dado uma reta l no plano e um ponto A fora de l, traçar uma paralela à reta l passando pelo ponto A.

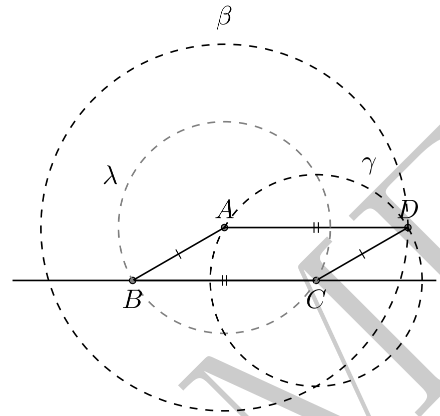
A teoria dos paralelogramos fornece uma solução para esse problema. Em vez de um par de esquadros, utilizemos desta feita uma régua e um compasso. Para tanto, executemos os seguintes procedimentos:

1. com o compasso centrado em A, trace um círculo $\lambda = C(A, r_1)$, de raio r_1 (abertura do compasso) maior do que a distância de A à reta l, obtendo os pontos de interseção B e C da reta l com o círculo λ;

2. ainda com o compasso centrado em A, construa o círculo $\beta = C(A, r_2)$, de centro A e raio $r_2 = BC$;

3. agora, com o compasso centrado em C, trace o círculo $\gamma = C(C, r_1)$, de centro C e raio r_1;

4. marque o ponto D, interseção dos círculos β e γ e situado no semiplano determinado por l e que contém A.



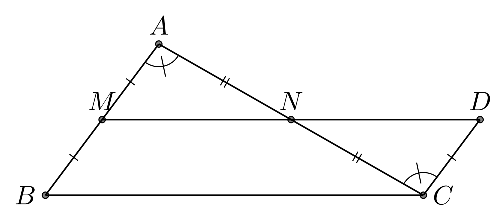
Segue do item (a) do Teorema 5 que $ABCD$ é um paralelogramo. Logo, pela definição inicial de paralelogramo, a reta $m = \overleftrightarrow{AD}$ é paralela à reta $l = \overleftrightarrow{BC}$ e, obviamente, passa por A.

2 O Teorema da Base Média de um Triângulo e aplicações

Já ilustramos algumas situações em que as definições alternativas de paralelogramo (caracterizações) foram usadas de maneira essencial. A seguir, apresentaremos outras, a começar pelo importante *Teorema da Base Média de um triângulo.*

Teorema 6 (da Base Média de um Triângulo). *Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e mede metade desse terceiro lado.*

Prova. Sejam ABC um triângulo e M e N os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

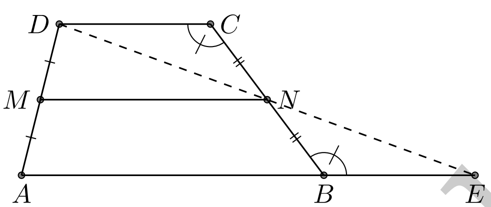


Vamos mostrar que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e que $MN = \frac{1}{2}BC$. Para tanto, seja D o ponto em $\overrightarrow{MN}$ com $MN = ND$. Uma vez que $MN = ND$, $AN = NC$ e $A\widehat{N}M = C\widehat{N}D$, o critério LAL de congruência de triângulos garante que $DNC \equiv MNA$. Assim, $MB = MA = DC$ e $\angle MAN \equiv \angle DCN$. A partir daí, o Teorema dos Ângulos Alternos Internos aplicado às retas $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{MB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ e à transversal $\overleftrightarrow{AC}$ garante que $\overleftrightarrow{MB}$ é paralela a $\overleftrightarrow{DC}$. Então, como $MB = DC$ e $\overleftrightarrow{MB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, o item (c) do Teorema 5 garante que o quadrilátero $MBCD$ é um paralelogramo. Logo, $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e $BC = MD$. Portanto, $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}BC$. $\square$

Os resultados elencados no restante desta seção constituem-se, em última análise, em aplicações importantes do Teorema da Base Média a vários contextos.

Teorema 7 (Teorema da Base Média de um Trapézio)**.** *Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos dois lados não paralelos de um trapézio (admitindo que ele não seja um paralelogramo), então esse segmento é paralelo às bases do trapézio e sua medida é igual à média aritmética das medidas das bases.*

Prova. Seja $ABCD$ um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e sejam M e N os pontos médios dos lado não paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

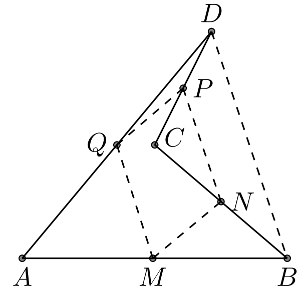


Vamos mostrar que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{AB}$ (e, portanto, a $\overline{CD}$), com $MN = \frac{AB+CD}{2}$. Segue do axioma das paralelas que as semirretas $\overrightarrow{DN}$ e $\overrightarrow{AB}$ se intersectam num ponto E. Como $N\widehat{C}D = N\widehat{B}E$ (Recíproco do Teorema AAI), $C\widehat{N}D = B\widehat{N}E$ (ângulos OPV) e $BN = CN$, os triângulos ENB e DNC são congruentes pelo critério ALA. Portanto, $BE = CD$ e N também é o ponto médio de DE (de sorte que MN é base média de ADE). Então, aplicando o Teorema 6, obtemos o resultado desejado. $\square$

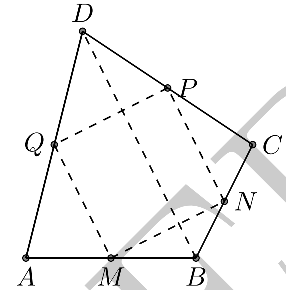
Outra aplicação imediata do Teorema da Base Média de um triângulo fornece o seguinte resultado.

Teorema 8. *Seja $ABCD$ um quadrilátero (convexo ou não convexo). Se M, N, P e Q são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, então o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.*

Prova. Seja $\overline{BD}$ uma das diagonais do quadrilátero $ABCD$ (veja a figura a seguir, onde os casos convexo e não convexo são ilustrados simultaneamente).



Quadrilátero não convexo.



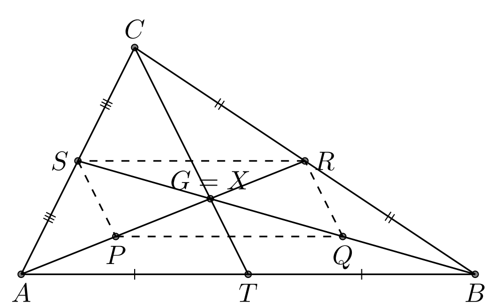
Quadrilátero convexo.

No triângulo ABD, os pontos M e Q são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, ao passo que, no triângulo CBD, os pontos N e P são, também respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{CB}$ e $\overline{CD}$. Aplicando o Teorema da Base Média de um Triângulo aos triângulos ABD e CBD, concluímos que os segmentos $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ são paralelos, com $MQ = \frac{BD}{2} = NP$. Então, $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ são lados opostos paralelos e congruentes de um quadrilátero. Portanto, pelo item (c) do Teorema 5 esse quadrilátero é um paralelogramo. $\square$

Conforme veremos no tópico Pontos Notáveis de um Triângulo, a interseção das medianas, das bissetrizes e das alturas de um triângulo apresentam propriedades importantes e permitem definir novos conceitos relacionados a triângulos. O caso do ponto de concorrência das três medianas de um triângulo, chamado de **baricentro do triângulo**, será tratado a seguir. Observamos que, se recortarmos uma chapa fina e uniforme de madeira ou metal no formato de um triângulo, então, fisicamente, o baricentro é o *centro de massa* da chapa.

Teorema 9 (Baricentro de um triângulo)**.** *As medianas de um triângulo são concorrentes. Além disso, o ponto de concorrência está situado, ao longo de cada mediana, a $\frac{2}{3}$ da distância do vértice ao ponto médio do lado oposto.*

Prova. Sejam $\overline{AR}$ e $\overline{BS}$ as medianas de um triângulo ABC relativas aos vértices A e B. Elas se intersectam num ponto X do interior do triângulo. Sejam P e Q os pontos médios de $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$, respectivamente.



Aplicando o Teorema 6 aos triângulos ABC e ABX, concluímos que $\overline{SR}$ é paralela a $\overline{AB}$, com $SR = \frac{AB}{2}$, e $\overline{PQ}$ é paralela a $\overline{AB}$, com $PQ = \frac{AB}{2}$. Logo, $\overline{SR}$ e $\overline{PQ}$ são lados opostos paralelos do quadrilátero $PQRS$, com $SR = PQ$. Portanto, o item (c) do Teorema 5 garante que $PQRS$ é um paralelogramo, de sorte que suas diagonais se dividem ao meio. Assim, $RX = XP = PA$ e $SX = XQ = QB$, logo, $AX = 2RX$ e $BX = 2SX$.

Utilizando as medianas $\overline{AR}$ e $\overline{CT}$ e argumentando de modo análogo, obtemos, para o ponto Y de interseção das mesmas, $AY = 2RY$. Mas, como $AX = 2RX$ e X também pertence a AR, segue que $X = Y$. Em particular, as medianas AR, BS e CT se intersectam num mesmo ponto $G = X = Y$, com $AG = 2RG$, $BG = 2SG$ e $CG = 2TG$. □

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em dois encontros de 50 minutos cada. A primeira seção introduz o Teorema Recíproco do Teorema dos Ângulos Alternos-Internos. O professor deve reforçar que ele é equivalente ao Postulado das Paralelas de Euclides, sendo o resultado que diferencia a Geometria Euclidiana das outras Geometrias, como por exemplo a Geometria de Lobachevsky, ou Hiperbólica. Também deve observar que ele, o Teorema Recíproco do Teorema do dos Ângulos Alternos-Internos, permite obter as formas equivalentes de definir cada um dos quadriláteros notáveis.

Essas definições e resultados são argumentos essenciais a consecução de certas construções geométricas, como a discutida ao final da Seção 1; sugerimos ao professor trabalhá-la com cuidado, utilizando tanto a construção com esquadros quanto a com régua e compasso. As definições e resultados apresentados também são essenciais à obtenção de novos resultados, como por exemplo o Teorema da Base Média de um Triângulo, a boa definição do Baricentro etc, os quais são discutidos na Seção 2.

A referência [2] contém vários exercícios simples envolvendo o paralelismo de retas. Na referência [1] encontramos problemas mais conceituais, incluindo alguns que tratam de construções geométricas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.