Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos, Polígonos Regulares

Relações Métricas em Polígonos Regulares - Parte 2

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

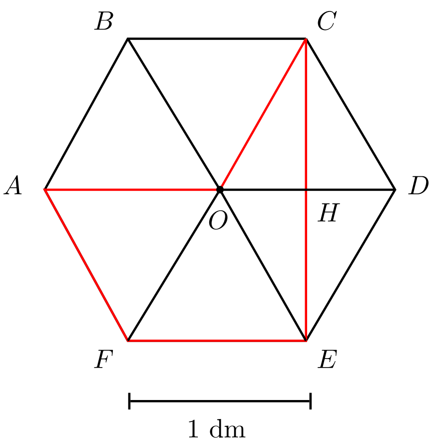
3 de setembro de 2018

Portal da Matemática
OBMEP

1 Exemplos

Nessa segunda parte, examinamos mais alguns exemplos envolvendo relações métricas em polígonos regulares. Em particular, discutimos uns tantos exemplos mais elaborados que aqueles apresentados na primeira parte.

Exemplo 1. *Na figura abaixo, o polígono $ABCDEF$ é um hexágono regular de centro O, cujo lado mede 1 dm. Calcule o perímetro do polígono não convexo $AOCEF$.*



Solução. Como podemos observar na figura, o hexágono $ABCDEF$ foi dividido em seis triângulos equiláteros: OAB, OBC, OCD, ODE, OEF e OFA.

Sendo H o ponto de interseção dos segmentos CE e DO, temos

$$\overline{CE} = \overline{CH} + \overline{HE}.$$

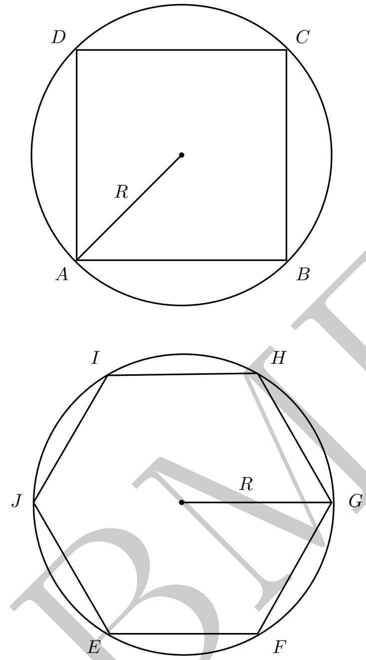
Também, como $\overline{CO} = \overline{CD}$ e $\overline{EO} = \overline{ED}$, segue que $\overleftrightarrow{CE}$ é a mediatriz do segmento DO e, assim, H é o pé das alturas dos triângulos equiláteros OCD e ODE em relação à base comum OD.

Lembrando que a medida das alturas de um triângulo equilátero de lado l é igual a $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, temos que o perímetro do polígono $AOCEF$ é, em decâmetros, igual a

$$\begin{aligned} &\overline{AO} + \overline{OC} + \overline{CE} + \overline{EF} + \overline{FA} = \\ &= \overline{AO} + \overline{OC} + \overline{CH} + \overline{HE} + \overline{EF} + \overline{FA} \\ &= 1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 = 4 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Na figura a seguir, temos um quadrado e um hexágono regular inscritos em círculos de mesmo raio R. Encontre a razão entre os perímetros do quadrado e do hexágono regular.*



Solução. Conforme aprendemos na Parte 1 do material teórico dessa aula, as medidas dos lados de um quadrado e de um hexágono regular inscritos em um círculo de raio R são dados por

$$l_4 = R\sqrt{2} \ \text{ e } \ l_6 = R,$$

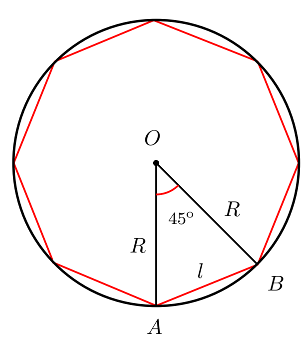
respectivamente. Portanto, a razão entre os perímetros do quadrado e do hexágono regular é igual a

$$\frac{4\cancel{R}\sqrt{2}}{6\cancel{R}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

□

Exemplo 3. *Calcule a medida do lado de um octógono regular inscrito em um círculo de raio R.*

Solução. A figura a seguir mostra (em vermelho) um octógono regular inscrito num círculo de raio R.



Sendo O o centro do círculo e A e B dois vértices consecutivos do octógono, temos

$$A\widehat{O}B = \frac{360^{\text{o}}}{8} = 45^{\text{o}}.$$

Por outro lado, lembrando que $\cos 45^{\text{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo isósceles AOB, obtemos:

$$\begin{aligned} l^2 &= R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 45^{\text{o}} \\ &= 2R^2 - \cancel{2}R^2 \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \\ &= R^2(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

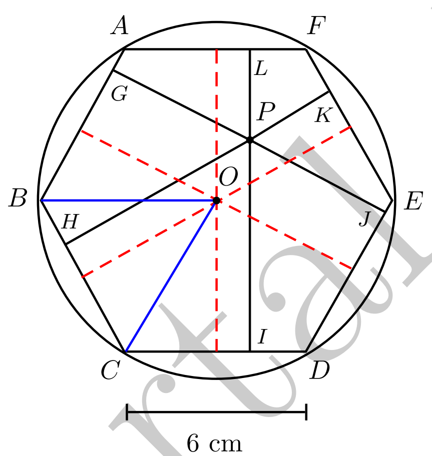
Então,

$$l = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

□

Exemplo 4. *Considere um ponto P, interior a um hexágono regular de lado 6 cm. Calcule os possíveis valores da soma das distâncias de P às retas suportes dos lados do hexágono.*

Solução. Sejam $ABCDEF$ o hexágono regular e G, H, I, J, K e L os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA, respectivamente (veja a figura abaixo).



Uma vez que os lados opostos de um hexágono regular são paralelos, a distância entre dois quaisquer deles é igual a $2a_6$, onde a_6 denota o apótema do hexágono; na figura, tais distâncias correspondem aos comprimentos dos segmentos tracejados vermelhos. Então, temos:

$$\overline{PG} + \overline{PJ} = \overline{GJ} = 2a_6,$$

$$\overline{PH} + \overline{PK} = \overline{HK} = 2a_6,$$

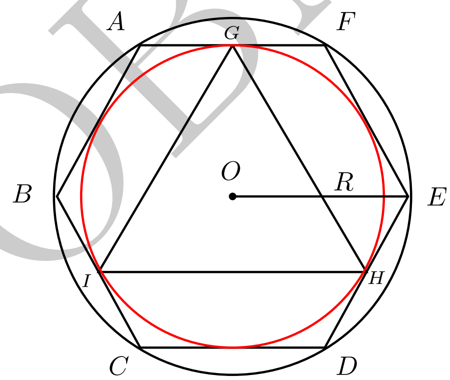
$$\overline{PI} + \overline{PL} = \overline{IL} = 2a_6.$$

Portanto, a soma das distâncias de P aos lados do hexágono, em centímetros, é igual a

$$\begin{aligned} &\overline{PG} + \overline{PH} + \overline{PI} + \overline{PJ} + \overline{PK} + \overline{PL} + \overline{PM} = \\ &= \left(\overline{PG} + \overline{PJ}\right) + \left(\overline{PH} + \overline{PK}\right) + \left(\overline{PI} + \overline{PL}\right) \\ &= 2a_6 + 2a_6 + 2a_6 = 6a_6 \\ &= 6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Na figura abaixo, $ABCDEF$ é um hexágono regular inscrito em um círculo de centro O, e GHI é um triângulo equilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados AF, BC e DE do hexágono. Calcule a razão entre os perímetros do triângulo e do hexágono.*



Solução. Denotemos por R o raio do círculo que circunscreve o hexágono.

Uma vez que o lado de um hexágono regular inscrito em um círculo é igual ao raio do círculo, temos que o perímetro de $ABCDEF$ é igual a $6R$.

Quanto a GHI, denotando por a_6 o apótema do hexágono, recordamos que o círculo de centro O e raio a_6 passa pelos pontos médios dos lados de $ABCDEF$; em particular, tal círculo passa por G, H e I.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} G\widehat{O}I &= G\widehat{O}A + A\widehat{O}B + B\widehat{O}I \\ &= 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 120^\circ \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$G\widehat{O}H = I\widehat{O}H = 120^\circ.$$

Então, GHI é um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio a_6.

Lembrando que a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio r é dada por $r\sqrt{3}$, concluímos que o perímetro de GHI é igual a $3a_6\sqrt{3}$.

Agora, em relação ao círculo de raio R, sabemos que

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, o perímetro de GHI mede

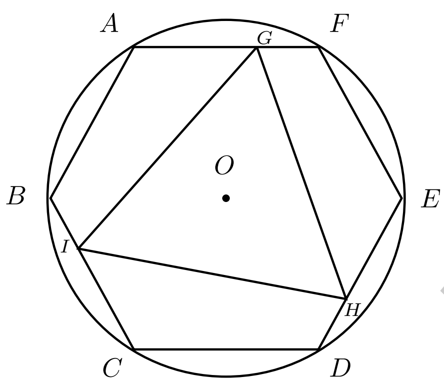
$$3 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3R}{2}.$$

Por fim, a razão entre os perímetros do triângulo equilátero GHI e do hexágono regular $ABCDEF$ é:

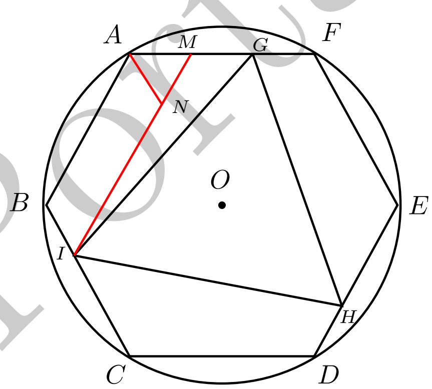
$$\frac{\frac{9\cancel{R}}{2}}{6\cancel{R}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

□

Exemplo 6. *Encontre o perímetro do triângulo GHI dado na figura abaixo, sabendo que $ABCDEF$ é um hexágono regular cujos lados medem 3 cm e que $\overline{FG} = 1$ cm, $\overline{DH} = 1$ cm e $\overline{BI} = 1$ cm.*



Solução. Sendo M o ponto médio de AG, temos $\overline{AM} = \overline{MG} = 1$ cm (veja a próxima figura). Mostraremos que $\overline{IM} = 4$ cm e, em seguida, aplicaremos a Lei dos cossenos para encontrar a medida lado GI.



Iniciamos notando que $\angle IBA$ e $\angle MAB$ são ângulos internos de um hexágono regular, logo, medem 120º. Daí, como $\overline{AM} = \overline{BI}$, concluímos que o quadrilátero $ABIM$ é um trapézio isósceles.

Agora, traçando a paralela a $\overleftrightarrow{IB}$ passando por A e denotamos por N seu ponto de interseção com $\overleftrightarrow{IM}$, obtemos o quadrilátero de lados opostos paralelos (logo, um paralelogramo) $ABIN$.

Além disso, como $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{IM}$ são retas paralelas, temos

$$A\widehat{M}N = 180° - M\widehat{A}B = 180° - 120° = 60°$$

e

$$A\widehat{N}M = B\widehat{I}M = 180° - A\widehat{B}I = 60°.$$

Portanto, dois dos ângulos do triângulo AMN medem 60º, de onde concluímos que AMN é equilátero e, assim, $\overline{MN} = \overline{AM} = 1$ cm.

Por outro lado, $\overline{NI} = \overline{AB} = 3$ cm, de forma que

$$\overline{MI} = \overline{MN} + \overline{NI} = 1 + 3 = 4 \text{ cm}.$$

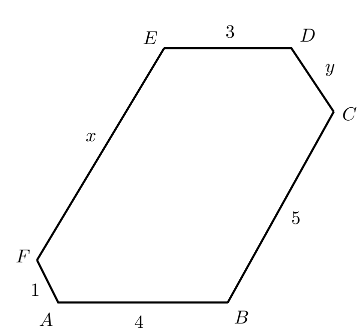
Finalmente, notando que $I\widehat{M}G = 120^o$ (novamente pelo paralelismo entre $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{IM}$), aplicamos a Lei dos cossenos ao triângulo MGI para obter

$$\begin{aligned}\overline{GI}^2 &= \overline{MI}^2 + \overline{MG}^2 - 2\overline{MI} \cdot \overline{MG} \cdot \cos 120^o \\ &= 4^2 + 1^2 - \cancel{2} \cdot 4 \cdot 1\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \\ &= 16 + 1 + 4 = 21.\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{GI} = \sqrt{21}$ e, argumentando de modo análogo, concluímos que $\overline{GH} = \overline{HI} = \sqrt{21}$. Logo, o triângulo GHI é equilátero, de perímetro igual a $3\sqrt{21}$ cm. □

No próximo exemplo, polígonos regulares aparecem de forma um tanto inusitada.

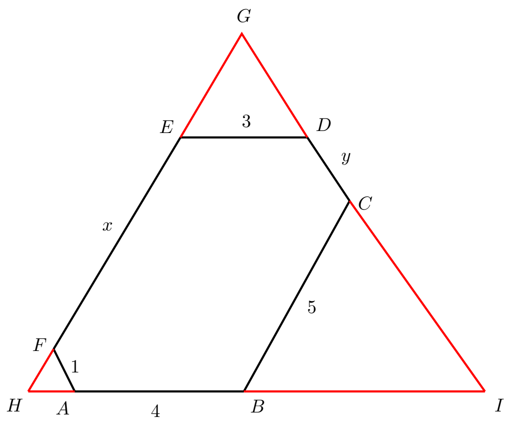
Exemplo 7 (BANCO OBMEP)**.** *Um hexágono é chamado equiângulo quando possui os seis ângulos internos iguais. Considere o hexágono equiângulo $ABCDEF$ mostrado na figura a seguir, cujos lados medem 3, y, 5, 4, 1 e x. Calcule os comprimentos x e y.*



Solução. Uma vez que o hexágono $ABCDEF$ é equiângulo e tem soma dos ângulos internos igual a $180°(6-2) = 180° \cdot 4$, concluímos que cada um dos seus ângulos internos mede

$$\frac{1}{6} \cdot 180° \cdot 4 = 120°.$$

Prolongando os lados AB, CD e EF, formaremos, como mostrado na figura abaixo, os triângulos AFH, DGE e BIC, cada um dos quais tem dois ângulos internos iguais a $180° - 120° = 60°$. Portanto, AFH, DGE e BIC são,



de fato, equiláteros, com lados medindo, respectivamente, 1, 3 e 5.

Por sua vez, o fato de $A\widehat{H}F = B\widehat{I}C = D\widehat{G}E = 60°$ implica que GHI também é equilátero, com

$$\begin{aligned} \overline{HI} &= \overline{AH} + \overline{AB} + \overline{BI} \\ &= \overline{AF} + \overline{AB} + \overline{BC} \\ &= 1 + 4 + 5 = 10. \end{aligned}$$

Por fim, argumentando como acima, obtemos

$$\overline{GH} = \overline{GE} + \overline{EF} + \overline{FH} = 3 + x + 1 = x + 4$$

e

$$\overline{GI} = \overline{GD} + \overline{CD} + \overline{CI} = 3 + y + 5 = y + 8,$$

de sorte que

$$\overline{GH} = \overline{HI} \Longrightarrow x + 4 = 10 \Longrightarrow x = 6$$

e

$$\overline{GI} = \overline{HI} \Longrightarrow y + 8 = 10 \Longrightarrow y = 2.$$

□

Incidentalmente, a última figura acima mostra como podemos obter uma infinidade de hexágonos equiângulos dois a dois distintos: basta começar com um triângulo equilátero GHI e traçar paralelas a cada lado, *destacando* de GHI triângulos equiláteros AFH, BCI e DEG.

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor os exemplos que compõem este material. Sugerimos ao professor que relembre aos alunos as deduções das fórmulas do lado e do apótema de polígonos inscritos e circunscritos, no momento em que for utilizar cada uma delas, sempre alertando os alunos para o fato de que eles não devem tentar memorizá-las, e sim deduzi-las quando necessário.

As referências a seguir trazem mais exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, relativos ao conteúdo dessa aula.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. G. Iezzi. *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. São paulo, Editora Atual, 2013.