Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

A Curva Normal Padrão

Segundo Ano do Ensino Médio

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de junho de 2020

Portal da Matemática
OBMEP

1 A curva normal padrão

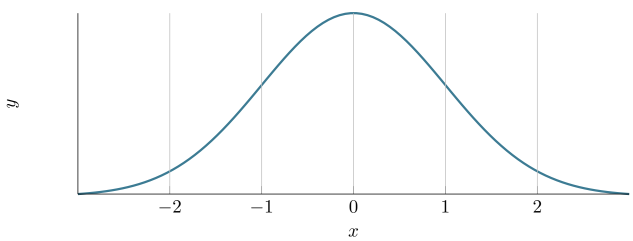
Nesse material, estudaremos em mais detalhes a curva normal padrão. Lembre-se de que ela é o caso particular de curva normal no qual a média é $\mu = 0$ e o desvio-padrão é $\sigma = 1$. Sua definição formal é dada a seguir:

Definição 1. *A função densidade da distribuição normal padrão é dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

onde $\pi \cong 3{,}1415$ *e* $e \cong 2{,}7182$ *(ambos com quatro casas decimais corretas).*

A seguir, apresentamos o gráfico da função densidade da distribuição normal padrão, que é precisamente o que se conhece como a **curva normal padrão**.



Perceba que $f(x) = f(-x)$ para todo x real; logo, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Além disso, o fator $e^{-\frac{x^2}{2}}$ faz com que os valores de $f(x)$ tornem-se pequenos muito rapidamente, à medida que $|x|$ aumenta.

Para construir os gráficos dessa funções, basta utilizar as seguintes linhas de comando em R:

```
x   <- seq(-3,3,length=1000)
y   <- dnorm(x,mean=0, sd=1)
plot(x,y, type="l", lwd=1)
```

Como trata-se de uma distribuição de probabilidade, a área abaixo da curva limitada pelas retas $x = 0$ e $x = a$ corresponde à probabilidade do resultado de um experimento z, com distribuição normal padrão, ser menor que ou igual a a. Este valor é denotado por $P(z \leq a)$.

Definição 2. *Dada a curva normal padrão, sua* ***função de distribuição acumulada*** *é a função* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$F(k) = P(z \leq k),$$

para todo $k \in \mathbb{R}$.

Como vimos no material anterior, no software R estes valores podem ser facilmente obtidos através do comando

`pnorm(k)`,

onde o valor de k deve ser o número real tal que queremos calcular o valor de $F(k)$.

Porém, nem sempre dispomos de um computador para encontrar tais probabilidades. Nestes casos, é necessário recorrer a alguma tabela que colecione os valores de $F(k)$ para diversos números k. Uma tabela desse tipo pode ser encontra na página 3.

Na tabela 1, é possível encontrar o valor de $F(k)$ para qualquer valor de k entre 0 e 3,09 que tenha duas casas decimais após a vírgula. Por exemplo, para encontrarmos o valor de $F(0{,}85)$, em primeiro lugar observamos que $0{,}85 = 0{,}8 + 0{,}05$. Assim, buscando a nona linha e sexta coluna, encontramos o valor

$$F(0{,}85) = 0{,}8023,$$

conforme os destaques em azul da tabela 1.

Para saber os valores de $F(k)$ quando k é negativo, basta utilizar a propriedade da curva normal padrão ser simétrica em relação ao eixo y, juntamente com o fato de que a área sob ela (de $-\infty$ a $+\infty$) é igual a 1.

Em termos algébricos, vimos na no material teórico referente à aula 3 que essa propriedade pode ser expressa através da identidade

$$P(z \leq -k) = 1 - P(z \leq k). \tag{1}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} P(z \leq -0{,}85) &= 1 - P(z \leq 0{,}85) \\ &= 1 - 0{,}8023 \\ &= 0{,}1977. \end{aligned}$$

Exercício 3. *Dada a curva normal padrão, utilize a tabela 1 para calcular as probabilidades a seguir:*

(a) $P(z \leq 2)$.

(b) $P(z \geq 1{,}3)$.

(c) $P(-2 \leq z \leq 1{,}3)$.

Solução.
(a) Basta encontrar o valor de $F(2)$ na tabela e verificar que é igual 0,9772.

(b) Primeiramente, utilizamos a tabela para calcular $F(1{,}3) = 0{,}9032$. Esta é a probabilidade do resultado do experimento ser um valor menor que ou igual a 1,3. Para encontrarmos o valor pedido no item, subtraímos esse número de 1 (que é equivalente à probabilidade total). Assim, obtemos:

$$P(z \geq 1{,}3) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968.$$

(c) Pela simetria da curva normal, sabemos que

$$P(z \leq -2) = P(z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2),$$

que é igual a $1-0{,}9772$, pelo item (a). Além disso, sabemos pelo item (b) que $P(z \geq 1{,}3) = 0{,}9032$. Logo,

$$P(-2 \leq z \leq 1{,}3) = 0{,}9032 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}8804.$$

□

A partir da identidade (1), temos que, para $k > 0$,

$$\begin{aligned} P(-k \leq z \leq k) &= P(z \leq k) - P(z \leq -k) \\ &= P(z \leq k) - \big(1 - P(z \leq k)\big) \\ &= 2P(z \leq k) - 1. \end{aligned}$$

Com essa segunda identidade em mãos, podemos resolver o seguinte exercício.

Exercício 4. *Dada a curva normal padrão, utilize a tabela 1 para calcular as probabilidades a seguir:*

(*a*) $P(-1 \leq z \leq 1)$.

(*b*) $P(-2 \leq z \leq 2)$.

(*c*) $P(-3 \leq z \leq 3)$.

Solução.
(a) Pela tabela, vemos que $P(z \leq 1) = 0{,}8413$. Assim,

$$P(-1 \leq z \leq 1) = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

(b) Pela tabela, vemos que $P(z \leq 2) = 0{,}9772$. Assim,

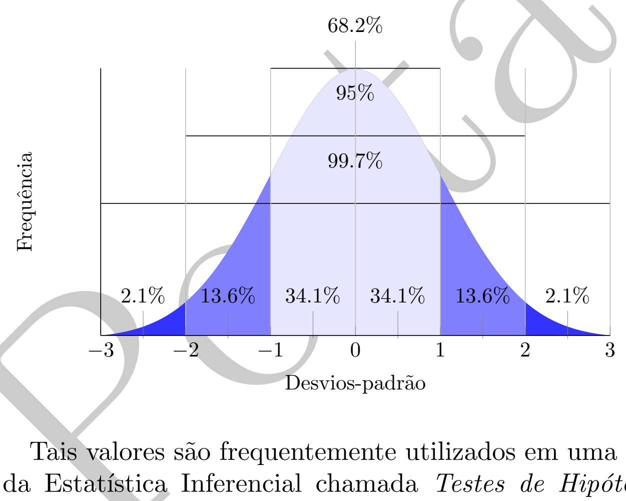
$$P(-2 \leq z \leq 2) = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544.$$

(c) Pela tabela, vemos que $P(z \leq 3) = 0{,}9987$. Assim,

$$P(-3 \leq z \leq 3) = 2 \cdot 0{,}9987 - 1 = 0{,}9974.$$

□

Os resultados das probabilidades calculadas no exemplo anterior podem ser melhor visualizados no gráfico a seguir:



Tais valores são frequentemente utilizados em uma área da Estatística Inferencial chamada *Testes de Hipóteses*. Os testes aos quais o nome se refere servem para medir o grau de confiabilidade de um teste realizado com uma amostra de uma população na qual deseja-se estimar algum parâmetro.

2 Sugestões aos professores

Separe um encontro de 50 minutos para ensinar o conteúdo deste material. O objetivo desta aula é ensinar seus alunos a utilizarem a tabela da curva normal padrão. Se possível, utilize outras disposições de tabelas (diferentes da apresentada na página 3) para que os alunos aprendam a identificar as probabilidades corretas. Uma possibilidade é apresentar a tabela de $P(-k \leq z \leq k)$ ao invés da tabela de $P(z \leq k)$. Nesse caso, os alunos terão que usar fortemente a propriedade de simetria da curva normal.

As referências a seguir contêm muito mais sobre a distribuição normal. Para o caso de você ter ficado interessado, elas também abordam testes de hipóteses.

Referências

[1] João Ismael Pinheiro et al. *Estatística Básica: a arte de trabalhar com dados*. Campus, 2009.

[2] Pedro A. Morettin and Wilton de O. Bussab. *Estatística Básica*. Saraiva, 2010.

Tabela 1: Tabela correspondente à distribuição acumulada da curva normal padrão.

$$F(z) = P(z \leq k)$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990