

Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

Proporções e Conceitos Relacionados

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto



1 Introdução

Na aula anterior, aprendemos que uma razão é uma medida relativa entre duas grandezas. Por exemplo, se em uma sala de aula há 11 meninos e 12 meninas, a razão entre meninos e meninas será 11 : 12; por outro lado, se em uma outra sala existirem 22 meninos e 24 meninas, a razão entre meninos e meninas nesta segunda sala também será 11 : 12, pois ao simplificarmos a fração $\frac{22}{24}$ obtemos $\frac{11}{12}$.

Com este exemplo, é possível perceber que duas ou mais frações podem representar um mesmo número. Neste caso específico, temos:

$$\frac{22}{24} = \frac{11}{12}.$$

Definição 1.1

Dizemos que duas razões com termos não-nulos, $a : b$ e $c : d$, formam uma **proporção** quando as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ forem equivalentes, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Representamos esta proporção como

$$a : b = c : d$$

e lemos “ a está para b assim como c está para d ”.

Por exemplo, 2 : 3 e 4 : 6 formam uma proporção, pois

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

Dessa forma, dizemos que 2 está para 3 assim como 4 está para 6.

Alternativamente, dizemos que a quádrupla (a, b, c, d) é **diretamente proporcional** quando $a : b = c : d$. Um caso particular ocorre quando os dois elementos centrais de uma quádrupla proporcional são iguais. Neste caso, dizemos tratar-se de uma **proporção contínua**. Por exemplo, $(4, 6, 6, 9)$ é uma proporção contínua, uma vez que

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}.$$

2 Multiplicação em x

Um método prático para decidir se duas razões são proporcionais é utilizar a regra da **multiplicação em xis (x)**. Essa regra decorre do fato de que a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é equivalente à igualdade

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$

(uma vez que b e d são ambos não-nulos) ou, o que é o mesmo, a $ad = bc$. Portanto, a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é equivalente a

$$ad = bc,$$

sendo essa última igualdade obtida multiplicando os *extremos* a , d e os *meios* b , c . Por exemplo, temos $2 : 3 = 4 : 6$, uma vez que $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$.

Em palavras, diz-se usualmente que, “em uma proporção, o produto dos meios deve ser igual ao produto dos extremos.”

Exemplo 1. Destaque, nos itens a seguir, as razões que são proporcionais a 3 : 4:

- a) 6 : 8.
- b) 8 : 10.
- c) 15 : 20.
- d) 9 : 16.

Solução. Para verificarmos quais razões são proporcionais, faremos o teste da multiplicação em xis:

- a) $3 \cdot 8 = 24 = 4 \cdot 6$. Portanto, 6 : 8 e 3 : 4 são proporcionais.
- b) $3 \cdot 10 = 30 \neq 32 = 4 \cdot 8$. Portanto, 8 : 10 e 3 : 4 não são proporcionais.
- c) $3 \cdot 20 = 60 = 4 \cdot 15$. Portanto, 15 : 20 e 3 : 4 são proporcionais.
- d) $3 \cdot 16 = 48 \neq 36 = 4 \cdot 9$. Portanto, 9 : 16 e 3 : 4 não são proporcionais.

□

Exemplo 2. Verifique se as quádruplas a seguir são proporcionais:

- a) (5, 6, 7, 8).
- b) (2, 5, 10, 25).

Solução.

- a) Uma vez que $5 \cdot 8 \neq 6 \cdot 7$, temos que a quádrupla (5, 6, 7, 8) não é proporcional.
- b) Como $2 \cdot 25 = 5 \cdot 10$, segue que a quádrupla (2, 5, 10, 25) é proporcional.

□

3 Aplicação: figuras semelhantes

Um exemplo prático de aplicação de proporções em nosso dia-a-dia está nas figuras semelhantes. Observe que qualquer foto de uma pessoa é simplesmente uma representação proporcional da fisionomia real, porém em menor escala.

Dessa forma, se Pedro tem 10cm de cabelo e 3cm de barba e em uma de suas fotos sua barba tem 1cm , é possível calcular a medida de seu cabelo nesta foto resolvendo a equação obtida pela proporção entre as medidas reais e as respectivas medidas na foto.



Mais precisamente, se x é o tamanho do cabelo de Pedro na foto, temos que

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{x}$$

Multiplicando em x , obtemos:

$$3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \cong 3,34.$$

Um outro exemplo prático onde encontramos a utilização de proporções é na confecção de mapas. Nesse caso, usualmente encontramos escrito no mapa a **escala** em que o mesmo foi confeccionado, isto é, a proporção entre as distâncias no mapa e as distâncias reais.

Para exemplificar, suponha que em um mapa com escala de $1\text{cm} : 100\text{km}$, a distância entre duas cidades A e B seja igual a 23cm . Uma vez que cada 1cm no mapa corresponde a 100km na realidade, utilizando proporções podemos calcular facilmente a distância real entre as duas cidades como sendo de 2300km . De fato, denotando por x a distância real (em km) entre as duas cidades, temos

$$\frac{1\text{cm}}{100\text{km}} = \frac{23\text{cm}}{x\text{km}} \Rightarrow 1 \cdot x = 23 \cdot 100 \Rightarrow x = 2300.$$

4 Algumas definições úteis

Nesta seção, aprenderemos algumas definições que são baseadas no conceito de proporcionalidade e cujo uso é frequente em livros e exames.

Definição 4.1

dados números a e b , ambos diferentes de zero, chamamos **terceira proporcional** entre a e b (nessa

ordem) o número x que verifica a proporção contínua

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

Por exemplo, a terceira proporcional dos números 4 e 6 é o valor x tal que $\frac{4}{6} = \frac{6}{x}$. Aplicando a regra da multiplicação em x , obtemos:

$$4x = 36 \Rightarrow x = 9.$$

Definição 4.2

dados números a , b e c , todos diferentes de zero, chama-se **quarta proporcional** entre a , b e c (nessa ordem) o número x que verifica a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

À guisa de ilustração, considere os números 4, 6 e 8. A quarta proporcional entre eles (nessa ordem) é o valor x tal que $\frac{4}{6} = \frac{8}{x}$. Multiplicando em x e resolvendo a equação assim obtida, encontramos facilmente $x = 12$.

Observe que, em ambos os casos acima, a ordem em que os números são considerados é importante. Realmente, no exemplo dado na terceira proporcional, se calculássemos a terceira proporcional x entre 6 e 4, obteríamos

$$\frac{6}{4} = \frac{4}{x} \Rightarrow 6x = 16 \Rightarrow x = \frac{8}{3}.$$

Da mesma forma, a quarta proporcional y entre 6, 4 e 8, nessa ordem, é tal que

$$\frac{6}{4} = \frac{8}{y} \Rightarrow 6y = 32 \Rightarrow y = \frac{16}{3}.$$

Definição 4.3

dados os números positivos a e b , chamamos **média geométrica** entre a e b o número positivo x que verifica a proporção contínua

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Para resolver a equação anterior em x , começamos multiplicando em x para obter $x^2 = ab$, de sorte que x é precisamente a raiz quadrada de ab :

$$x = \sqrt{ab}.$$

Note que, como $ab = ba$, a ordem em que consideramos a e b não afeta o cálculo de sua média geométrica.

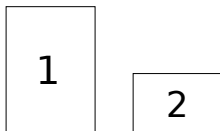
Por exemplo, a média geométrica de 20 e 5 é

$$x = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10.$$

5 Exemplos

Finalizaremos este material discutindo alguns exemplos para fixar os conceitos que foram apresentados até aqui.

Exemplo 3. Amanda deve fazer dois retângulos de papel proporcionais para um trabalho da escola. O primeiro recorte deve ter 50cm de altura e o segundo recorte deve ter 32cm de comprimento. Além disso, o comprimento do primeiro retângulo deve ser igual à altura do segundo. Calcule este valor.



Solução. Seja x o valor (em cm) a ser descoberto. De acordo com as informações apresentadas, temos a seguinte proporção:

$$\frac{50}{x} = \frac{x}{32}.$$

Ou seja, x deve ser a média geométrica entre 50 e 32. Portanto,

$$x = \sqrt{50 \cdot 32} = \sqrt{1600} = 40.$$

Exemplo 4. Uma operadora de telefonia móvel oferece um plano que consiste de uma tarifa fixa (que é paga independente do uso) mais um valor por cada minuto utilizado. No mês de janeiro, Carla utilizou seu celular por 12 minutos e pagou 27 reais. Em fevereiro, utilizou 15 minutos e pagou 33 reais. Qual é o valor pago por cada minuto e qual é a tarifa fixa desse plano?

Solução. Sendo x o valor da tarifa fixa, temos que, em janeiro, Carla pagou $27 - x$ pelos 12 minutos utilizados. Por outro lado, em fevereiro, ela pagou $33 - x$ pelos 15 minutos utilizados. Uma vez que um mesmo valor é cobrado por cada minuto utilizado, os cálculos acima nos fornecem a proporção

$$\frac{27 - x}{12} = \frac{33 - x}{15}.$$

Simplificando um fator 3 dos denominadores, obtemos a igualdade mais simples

$$\frac{27 - x}{4} = \frac{33 - x}{5}.$$

Multiplicando em xis, obtemos

$$5(27 - x) = 4(33 - x)$$

ou, ainda,

$$135 - 5x = 132 - 4x.$$

Logo, $x = 3$.

Por fim, se a tarifa fixa custa 3 reais, o preço por minuto utilizado é (como vimos acima)

$$\frac{27 - 3}{12} = \frac{24}{12} = 2.$$

□

O aluno também pode resolver o exemplo anterior utilizando um raciocínio mais elementar, como o apresentado a seguir:

Solução. Observe que, de um mês para o outro, houve um acréscimo de $15 - 12 = 3$ minutos utilizados, o que correspondeu a um acréscimo de $33 - 27 = 6$ reais na conta. Isso significa que cobra-se $\frac{6}{3} = 2$ reais por cada minuto. (Veja que, aqui, utilizamos o conceito de proporcionalidade: se três minutos correspondem a seis reais, então um minuto corresponderá a dois reais.)

Dessa forma, no primeiro mês foram cobrados $12 \cdot 2 = 24$ reais pelos minutos que Carla utilizou o telefone. Portanto, a tarifa fixa é $27 - 24 = 3$ reais. □

Exemplo 5. Dois copos de suco, de mesmos volumes, foram feitos a partir de uma mistura de água e polpa de fruta. No primeiro copo, a razão entre a polpa e a água utilizadas foi igual a 1 : 2, enquanto no segundo copo esta mesma razão foi de 3 : 4. Ao misturarmos estes dois copos em uma jarra, qual será a razão entre polpa e água?



Solução. Suponha que o volume de cada copo seja x . Segundo o enunciado, no primeiro copo, o volume de polpa será $\frac{x}{3}$ e o volume de água $\frac{2x}{3}$. No segundo copo, o volume de polpa será $\frac{3x}{7}$ e o volume de água $\frac{4x}{7}$. Ao misturarmos os dois copos teremos um volume de polpa igual a

$$\frac{x}{3} + \frac{3x}{7} = \frac{7x}{21} + \frac{9x}{21} = \frac{16x}{21}.$$

Além disso, teremos um volume de água igual a

$$\frac{2x}{3} + \frac{4x}{7} = \frac{14x}{21} + \frac{12x}{21} = \frac{26x}{21}.$$

Por fim, calculando a razão entre os volumes de polpa e de água encontrados acima, obtemos:

$$\frac{\frac{16x}{21}}{\frac{26x}{21}} = \frac{16x}{21} \cdot \frac{21}{26x} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}.$$

Portanto, depois de misturarmos os dois copos de suco na jarra, a razão entre a polpa e a água será 8 : 13. \square

Exemplo 6. *Em uma empresa, 500 funcionários são capazes de produzir 18000 peças por semana. Se o gerente desta empresa decidir abrir uma filial com 75 funcionários, mantendo o mesmo nível de produtividade, quantas peças a mais serão produzidas?*

Solução. Denotemos por x a quantidade de peças extras que serão produzidas pela filial. Como a produtividade será mantida, concluímos que as razões entre os números de funcionários e os totais produzidos pela matriz e pela filial são proporcionais. Dessa forma, $(500, 18000, 75, x)$ será uma quádrupla proporcional, a partir da qual encontramos a seguinte equação:

$$\frac{500}{18000} = \frac{75}{x}.$$

Multiplicando em xis, obtemos:

$$500x = 75 \cdot 18000 \Rightarrow 5x = 75 \cdot 180 \Rightarrow x = 15 \cdot 180 \\ \Rightarrow x = 2700. \quad \square$$

Exemplo 7. *Em uma conferência científica, a razão entre cientistas brasileiros e estrangeiros era de 7 : 9. Se havia 80 pessoas nessa reunião, quantos eram os brasileiros?*

Solução 1. Observe que, de cada 16 cientistas, sete são brasileiros e nove são estrangeiros. Portanto, a proporção de cientistas brasileiros na conferência era de $\frac{7}{16}$. Como havia 80 cientistas ao todo, concluímos que a quantidade de brasileiros era

$$\frac{7}{16} \cdot 80 = 7 \cdot 5 = 35. \quad \square$$

Outra solução um pouco mais técnica é a seguinte:

Solução 2. Se a razão entre cientistas brasileiros e estrangeiros era de 7 : 9, isso significa que (e aí temos a utilização da ideia de proporção), se tivéssemos $7x$ brasileiros, teríamos $9x$ estrangeiros, totalizando $7x + 9x = 16x$ pessoas. Por outro lado, se havia um total de 80 pessoas, então devemos ter $16x = 80$, ou seja, $x = 5$. Dessa forma, o número de brasileiros era $5 \cdot 7 = 35$. \square

Sugestões ao Professor

Reserve dois encontros de 50 minutos cada para expor o conteúdo desta aula. No primeiro encontro, apresente as definições e conceitos presentes nas seções de 1 a 4. No segundo encontro, resolva os exemplos apresentados na seção 5. Lembre-se de sempre dar algum tempo para os alunos desenvolverem suas próprias soluções antes de discutir aquelas apresentadas no texto.

Créditos pelas figuras:
www.freepik.com