Material Teórico - Módulo Introdução à Probabilidade

O Que É Probabilidade?

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

A ideia de probabilidade é algo bastante familiar em nosso dia a dia. Em Matemática, a Teoria das Probabilidades, ou simplesmente Probabilidade, surge como uma maneira de formalizar a noção de *chance* ou de *aleatoriedade*. Ela tem sua origem relacionada às tentativas de quantificação dos *riscos de seguros* nas sociedades antigas, e na avaliação das chances de se *ganhar em jogos de azar*. Estudos sobre seguros datam de mais de 5000 anos atrás, quando comerciantes mesopotâmios e fenícios se preocupavam com as perdas de cargas de navios (devidas a naufrágios ou furtos). Sabemos muito pouco sobre esse período, mas é certo que nessa época esses cálculos eram bem mais empíricos e com pouco formalismo matemático.

O primeiro estudo sistemático sobre como calcular probabilidades somente apareceu no livro "Liber de Ludo Aleae", publicado postumamente em 1663, de autoria do médico italiano (e também matemático, físico e astrólogo) Girolamo Cardano (1501–1576). Esse livro é basicamente um pequeno manual sobre jogos de azar. (Note que isso ocorreu há cerca de apenas 350 anos.) Contudo, mesmo tal livro possui alguns fatos contraditórios e limita-se a resolver problemas concretos (ou seja, com valores numéricos), não produzindo teoremas. Foram os franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) que iniciaram de modo formal o que hoje chamamos Teoria das Probabilidades.

Um problema famoso e influente nessa época foi o chamado problema dos pontos, inicialmente enunciado por Pacioli, por volta do ano 1500, e resolvido (em uma forma mais geral) por Pascal. Veremos uma solução para ele no material teórico da próxima aula.

Problema 1 (Problema dos pontos). *Em um jogo entre duas equipes, o total de apostas é de* 16 *ducados (uma moeda antiga). Ganha esse valor a equipe que primeiro obtiver* 6 *pontos em uma série de partidas, cada uma das quais valendo um ponto. O jogo precisou ser interrompido em certo momento, quando a equipe A estava com* 5 *pontos e a equipe B com* 3 *pontos. Considerando-se que, ainda assim, em cada partida seguinte as duas equipes tenham chances iguais de vencer, como se deve dividir (de forma justa) as moedas entre as duas equipes?*

A solução do problema acima exige uma quantificação sobre a chance de ocorrência de eventos que ainda não aconteceram, o que era bastante inovador para a época. Dentre tantos outros grandes nomes, J. Bernoulli, A. de Moivre e P. S. de Laplace, entre 1700 e 1850, deram início ao processo de abstração no estudo de probabilidades, gerando, assim, os primeiros teoremas da área (como a 'Lei dos Grandes Números', por exemplo). O que estudaremos aqui é fundamentado basicamente em ideias dessa época.

Por fim, observamos que somente em 1933 o matemático soviético A. Kolmogorov deu início à moderna Teoria das Probabilidades, fazendo isso em uma tal generalidade que tornou possível, inclusive, tratar questões probabilísticas em conjuntos infinitos. Contudo, essas generalizações requerem Matemática não elementar, fugindo ao escopo deste texto.

2 Conceitos básicos

Vamos começar definindo alguns termos importantes.

> **Experimento aleatório** é qualquer experimento cujo resultado não se consegue prever.

De outra forma, ainda que repetido em condições iguais ou muito semelhantes, um mesmo experimento aleatório pode apresentar resultados distintos.

Exemplo 2. *Centraremos nossas discussões em torno dos três experimentos aleatórios seguintes:*

(a) Lançar uma moeda e observar sua face virada para cima.

(b) Lançar um dado e observar sua face virada para cima.

(c) Sortear uma carta de baralho e observar o seu naipe.

> **Espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Conforme a definição acima deixa claro, cada experimento aleatório tem um espaço amostral correspondente a si. Em geral, utilizamos a letra grega maiúscula Ω (lê-se *ômega*) para representar o espaço amostral referente a um experimento aleatório fixado.

Exemplo 3. *Continuando o exemplo anterior, temos:*

(a) $\Omega = \{K, C\}$ *como espaço amostral relativo ao experimento aleatório de lançamento de uma moeda: Aqui usamos K para representar 'Cara', e C representar 'Coroa'.*

(b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *como espaço amostral para o lançamento de um dado de seis faces.*

(c) $\Omega = \{\textit{Ouros}, \textit{Copas}, \textit{Espadas}, \textit{Paus}\}$ *como espaço amostral relativo ao sorteio de uma carta de baralho:*

> **Evento** é um subconjunto qualquer do espaço amostral.

Veja, então, que um evento é um conjunto formado por alguns dos possíveis resultados de um experimento, sendo uma possibilidade o *evento nulo*, isto é, o conjunto vazio $\emptyset$.

Assim, um evento diferente do evento nulo pode ser descrito simplesmente listando-se todos os seus elementos, mas também é bastante comum descrevê-lo por meio de alguma propriedade que o mesmo possua.

Aqui, estaremos sempre interessados em calcular a probabilidade de ocorrência de um dado evento, o que significa calcular a probabilidade de que o resultado do experimento aleatório correspondente pertença ao conjunto que define o evento.

Exemplo 4. *Continuando os exemplos anteriores:*

(a) Em relação ao lançamento da moeda, o evento 'ocorrer cara' corresponde ao conjunto $\{K\}$.

(b) Em relação ao lançamento de um dado de seis faces, o evento 'ocorrer um número primo' corresponde ao conjunto $\{2, 3, 5\}$.

(c) Em relação ao sorteio de um a carta de baralho, o evento 'ocorrer um naipe vermelho' corresponde ao conjunto $\{Ouros, Copas\}$.

Veja que um mesmo evento pode ser descrito de várias maneiras diferentes. Por exemplo, o evento 'ocorrer cara' descrito acima é igual ao evento 'não ocorrer coroa', ao passo que o evento 'ocorrer um número primo' (no lançamento de um dado comum, de seis faces) é igual ao evento 'ocorrer o número dois, três ou cinco'.

Evento simples (ou unitário, ou elementar) é um evento formado por um único elemento do espaço amostral.

Para um elementos $\omega \in \Omega$ (ω é a letra grega minúscula *ômega*), muitas vezes denotamos o evento simples $\{\omega\}$ apenas por ω, a fim de não sobrecarregar a notação.

Por fim, antes de falar propriamente de probabilidade, é útil vermos um conceito de Estatística que pode ser obtido com dados *empíricos*, ou seja, obtidos realizando-se um experimento (na prática) várias vezes.

Digamos que certo experimento aleatório foi repetido várias vezes e, em cada uma delas, registramos o resultado obtido. Suponha, ainda, que estamos interessados em um dado evento E.

A **frequência relativa** de um evento E (dentro de uma série de experimentos), denotada por f_E, é o número obtido pela divisão da quantidade de vezes em que o evento ocorre (ou seja, em que o resultado obtido pertence ao conjunto E) pelo total de vezes que o experimento foi realizado.

Considere, por exemplo, um dado de seis faces, *viciado* (ou seja, tal que alguma(s) face(s) ocorre(m) com maior frequência do que as outras, devido a alguma assimetria no processo de fabricação do dado). Digamos que esse dado foi jogado 50 vezes, tendo sido registrados os valores da face virada para cima.

A seguinte tabela indica os valores obtidos e como calcular a frequência relativa dos eventos simples correspondentes.

Face	Número de Ocorrências	Frequência Relativa
1	5	$f_1 = 5/50$
2	15	$f_2 = 15/50$
3	6	$f_3 = 6/50$
4	4	$f_4 = 4/50$
5	16	$f_5 = 16/50$
6	4	$f_6 = 4/50$
	Total: 50	

Claramente, para qualquer evento E o valor de f_E satisfaz $0 \leq f_E \leq 1$, uma vez que o número de vezes em que o evento ocorreu é não negativo e é no máximo igual ao número de vezes em que o experimento foi realizado.

Observação 5. *Dado um espaço amostral finito, ao realizarmos um experimento várias vezes, a soma das frequências relativas dos possíveis eventos simples é sempre igual a* 1. *De fato, suponha que o experimento tenha sido realizado* n *vezes e que o espaço amostral tenha* k *elementos, digamos* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. *Seja* n_i *o número de ocorrências do evento* $\{\omega_i\}$. *Como em cada experimento exatamente um dos eventos simples ocorre, temos que* $n_1 + \cdots + n_k = n$. *Denotando por* f_i *a frequência relativa de* ω_i, *temos que* $f_i = \frac{n_i}{n}$. *Portanto, ao realizar a soma dessas frequências relativas, obtemos*

$$f_1 + \cdots + f_k = \frac{n_1}{n} + \cdots + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + \cdots + n_k}{n} = 1.$$

3 Probabilidade

Dado o espaço amostral Ω de certo experimento aleatório, uma probabilidade é uma função que atribui a cada evento $E \subset \Omega$ um determinado valor $\Pr(E)$ que satisfaz algumas condições que listaremos mais adiante. Intuitivamente, deseja-se que o valor $\Pr(E)$ seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento E quando o experimento for repetido um número suficientemente grande de vezes. A oração anterior pode ser tornada mais precisa, e transformada em um teorema dentro de alguns contextos, mas para isso são necessárias ferramentas mais avançadas, que fogem do escopo deste texto. Em todo caso, tendo em vista essa intuição subjacente, é natural que as condições que iremos exigir para a função Pr sejam semelhantes àquelas que já sabemos serem satisfeitas pela noção de frequência relativa.

Aqui, trataremos apenas do caso em que Ω é finito. Para tal caso, as três condições seguintes são suficientes para definirmos uma probabilidade.

Definição 6. *Suponha que* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. *Uma probabilidade* Pr *em* Ω *é uma função definida sobre os subconjuntos de* Ω *e satisfazendo as condições a seguir:*

(a) $\Pr(\emptyset) = 0$;

(b) $0 \leq \Pr(\omega_i) \leq 1$, *para todo* $\omega_i \in \Omega$;

(c) $\Pr(\omega_1) + \Pr(\omega_2) + \cdots + \Pr(\omega_k) = 1$;

(d) *para qualquer evento* E, *a probabilidade de* E *ocorrer, denotada por* $\Pr(E)$, *é a soma das probabilidades de seus elementos.*

Observação 7. *Note que o item (c) da definição anterior implica* $\Pr(\Omega) = 1$. *Também, para eventos* A *e* B disjuntos *(i.e., sem elementos em comum), segue prontamente do item (d) que*

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B).$$

Exemplo 8. *Ao lançar um dado honesto, ou seja, um em que todas as faces têm a mesma chance de serem obtidas, a probabilidade de obter cada uma das faces é igual a* $1/6$. *Ao jogar tal dado, a probabilidade de se obter um número primo é igual a:*

$$\Pr(\{2,3,5\}) = \Pr(2) + \Pr(3) + \Pr(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Observe que, se lançarmos um dados honesto 6.000 vezes é de se esperar que o número de vezes em que o resultado obtido é o número 5 seja de aproximadamente $\Pr(5) \cdot 6.000 = \frac{1}{6} \cdot 6.000 = 1.000$, uma vez que a frequência relativa do número 5 deve estar próxima de $1/6$. É claro que as chances de obtermos exatamente mil vezes o número 5 não são tão boas assim. Mas, usando ferramentas mais avançadas, é possível estimar com boa precisão o intervalo (em todo de 1.000) que, com altíssima probabilidade, contém o número de ocorrências do número 5.

Exemplo 9 (VUNESP, adaptado)**.** *Certo jogo consiste de um dispositivo eletrônico, na forma de um círculo, dividido em* 10 *setores numerados de* 1 *a* 10. *Em cada jogada, um único setor do disco se ilumina. O dispositivo foi programado de forma que para quaisquer números pares* m *e* n, *a probabilidade de que* m *seja iluminado é igual à probabilidade de que* n *seja iluminado. O mesmo vale para quaisquer dois números ímpares. Por outro lado, se* m *é ímpar e* n *é par, então a probabilidade de* m *ser iluminado é o dobro da probabilidade de* n *ser iluminado. Qual a probabilidade do número* 2 *ser iluminado? E do número* 3*? Qual a probabilidade do número iluminado ser primo?*

Solução. O espaço amostral correspondente é o conjunto $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. De acordo com os dados do problema, pelo modo como o dispositivo foi programado, é mais provável que o número iluminado seja ímpar do que par (apesar de as quantidades de números pares e ímpares serem iguais). Chamando $\Pr(1)$ de x e $\Pr(2)$ de y, pelos dados do problema podemos concluir que:

$$x = \Pr(1) = \Pr(3) = \Pr(5) = \Pr(7) = \Pr(9),$$

$$y = \Pr(2) = \Pr(4) = \Pr(6) = \Pr(8) = \Pr(10),$$

e

$$x = 2y.$$

Como $\Pr(1) + \cdots + \Pr(10) = 1$, segue que

$$1 = 5x + 5y = 5 \cdot (2y) + 5y = 15y.$$

Portanto $y = 1/15$ e $x = 2/15$. Em particular, $\Pr(2) = 1/15$ e $\Pr(3) = 2/15$.

Por fim, a probabilidade do número iluminado ser primo é igual à probabilidade do número iluminado pertencer ao conjunto $E = \{2, 3, 5, 7\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \Pr(E) &= \Pr(2) + \Pr(3) + \Pr(5) + \Pr(7) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 10. *No lançamento de um dado viciado de seis faces (numeradas de 1 a 6), a probabilidade de sair qualquer número é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de sair um número:*

(a) *par;*

(b) *maior que 4.*

Solução. O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Deve existir um constante de proporcionalidade k tal que:

$$\begin{aligned} &\Pr(1) = k,\ \Pr(2) = 2k,\ \Pr(3) = 3k \\ &\Pr(4) = 4k,\ \Pr(5) = 5k,\ \Pr(6) = 6k. \end{aligned}$$

Mas, como a soma das probabilidades dos eventos simples é igual a 1, devemos ter

$$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \Leftrightarrow 21k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{21}.$$

Portanto, a probabilidade do número obtido no dado ser par é igual a

$$\Pr(2) + \Pr(4) + \Pr(6) = 2k + 4k + 6k = 12k = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

Por sua vez, a probabilidade do número ser maior que 4 é igual à probabilidade dele ser igual a 5 ou 6, que é

$$\Pr(5) + \Pr(6) = 5k + 6k = 11k = \frac{11}{21}.$$

□

Nos dois últimos exemplos, apesar de a quantidade de números pares ser igual à de números ímpares no espaço amostral, não é verdade que a probabilidade do resultado obtido ser par é igual à probabilidade dele ser ímpar. Isso ocorre pelo fato desses dois exemplos tratarem de espaços *não equiprováveis*. Neles, o dado e a roleta não são considerados "honestos". Na seção seguinte trataremos de espaços *equiprováveis*, que aparecem na grande maioria dos exercícios sobre probabilidade no Ensino Médio.

4 Espaço amostral equiprovável

Um espaço de probabilidade (finito) é **equiprovável** se as probabilidades dos eventos simples são todas iguais. Se o espaço amostral equiprovável Ω possui n elementos, como a soma das probabilidades dos eventos simples correspondentes deve ser igual a 1, podemos concluir que cada evento simples deve ter probabilidade igual a $1/n$. Além disso, se $E \subset \Omega$ é um evento qualquer, denotando-se por $|E|$ o número de elementos de E, temos que o valor de $\Pr(E)$ é igual à soma das probabilidades dos $|E|$ elementos que compõem E, cada uma das quais é igual a $1/n$. Sendo assim:

Em um espaço equiprovável, temos:

$$\Pr(E) = \frac{|E|}{n} = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Ao calcular a probabilidade de um evento E, é comum pensar nos elementos de E como os resultados favoráveis (para que o evento ocorra). É daí que obtemos a famosa expressão para o cálculo de probabilidades, comumente usada na escola.

$$\Pr(E) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}}.$$

Com essa fórmula, podemos calcular certas probabilidades simplesmente resolvendo dois problemas de contagem: um para calcular o número de casos favoráveis e outro para calcular o tamanho do espaço amostral. Em geral, a dificuldade pode ser apenas conseguir identificar qual é o espaço amostral ou conseguir resolver esses dois problemas de contagem. Algumas vezes, o problema de contagem é trivial (como nos primeiros casos a seguir), mas em outras é necessário usar as técnicas que estudamos nos módulos anteriores. Em todo caso, não esqueça que essa estratégia só vale para espaços equiprováveis.

Exemplo 11. *No lançamento de um dado honesto de* 6 *faces (numeradas de* 1 *a* 6*), qual a probabilidade de se obter:*

(a) O número 5*?*

(b) Um número ímpar?

Solução. Ao dizer que o dado é honesto, o enunciado do problema está nos informando que todas as faces possuem a mesma probabilidade. Sendo assim, estamos com um espaço equiprovável.

Como o espaço amostral possui seis elementos, a probabilidade do número 5 ser obtido é igual a $1/6$ (existe apenas um caso favorável, que é obter o número 5).

Para o item (b), veja que a quantidade de números ímpares é igual a 3, logo, há três casos favoráveis. Assim, a probabilidade de se obter um número ímpar é igual a $3/6 = 1/5 = 50\%$.

Alternativamente, podemos encontrar a probabilidade de se obter um número ímpar somando-se as probabilidades de se obter cada um dos números ímpares (como vínhamos fazendo na seção anterior). Neste caso obtemos: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$, como antes. □

Exemplo 12. *Marcos e Paulo fazem parte de um grupo de dez pessoas, que serão dispostas aleatoriamente em fila. Qual a probabilidade de haver exatamente quatro pessoas entre Marcos e Paulo.*

Solução. Veja que o número total de maneiras de dispor as dez pessoas em um fila é igual a 10!. Neste caso, o espaço amostral é o conjunto formado por todas as 10! sequências de pessoas. Podemos assumir que essas maneiras de dispor as pessoas são equiprováveis (afinal, não haveria porque acontecer de que uma determinada disposição ser mais provável do que outra).

Precisamos, agora, contar o número de tais filas em que há exatamente quatro pessoas entre Marcos e Paulo (essa será a quantidade de casos favoráveis). Primeiro veja que devemos escolher se Marcos vem antes ou depois de Paulo na fila. Para isso, temos duas possibilidades: ou Marcos vem primeiro, ou Paulo vem primeiro. Digamos que Marcos venha primeiro. Então, como deve haver quatro pessoas entre eles, Marcos precisa ficar entre as 5 primeiras posições da fila. Por fim, uma vez escolhida uma dessas 5 posições, a posição de Paulo está completamente determinada, e podemos permutar as demais 8 pessoas livremente entre as outras posições (o que pode ser feito de 8! maneiras). Como o caso em que Paulo vem primeiro é análogo, concluímos que o número de casos favoráveis é igual a $2 \cdot 5 \cdot 8!$.

Sendo assim, a probabilidade procurada é igual a

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 8!}{10!} = \frac{10}{10 \cdot 9} = \frac{1}{9}.$$

□

Exemplo 13 (FUVEST). *Numa urna são depositados* n *etiquetas, numeradas de* 1 *a* n*. Três etiquetas são sorteadas sem repetição. Qual a probabilidade de os números sorteados serem consecutivos.*

Solução. Afirmar que o sorteio é realizado sem repetição quer dizer que, uma vez que uma etiqueta seja retirada da urna, ela não é recolocada lá dentro. Desse modo, as três etiquetas sorteadas são distintas. Assim, o resultado do sorteio é um conjunto de três etiquetas, e o conjunto de possíveis resultados forma o nosso espaço amostral. Além disso, para responder à questão, a ordem em que as etiquetas foram retiradas não é importante. Portanto, o número total de casos possíveis é igual a $\binom{n}{3}$. Veja, ainda, que cada um desses casos é equiprovável, uma vez que a chance de se retirar qualquer uma das etiquetas da urna é a mesma.

Dentre o total de conjuntos possíveis, devemos, agora, contar a quantidade daqueles que têm seus três elementos consecutivos. Veja que, uma vez escolhido o menor elemento do conjunto, os outros dois estão automaticamente determinados; além disso, o menor elemento deve pertencer ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n-2\}$. Em verdade, podemos até listar todos os subconjuntos com 3 elementos consecutivos: $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, ..., $\{n-2, n-1, n\}$.

Logo, há $n-2$ casos favoráveis, e a probabilidade desejada é igual a

$$\frac{n-2}{\binom{n}{3}} = \frac{n-2}{n(n-1)(n-2)} \cdot 3! = \frac{6}{n(n-1)}.$$

□

Exemplo 14. *Palíndromos são números inteiros positivos que são lidos da mesma forma, tanto da esquerda para direita como da direita para a esquerda. Por exemplo:* 8143418*,* 34211243*,* 787 *e* 444 *são palíndromos. Qual a probabilidade de obter um número palíndromo, sorteando-se um número de quatro algarismos de forma equiprovável (dentre os números de quatro algarismos).*

Solução. A quantidade de números de quatro algarismos é 9.000. De fato, isso pode ser calculado pelo princípio multiplicativo: há 9 possibilidades para o algarismo das unidades de milhar e 10 para cada um dos outros, totalizando $9 \cdot 10^3 = 9.000$ possibilidades. Alternativamente, podemos observar que o menor número de quatro algarismos é 1.000 e o maior é 9.999, de forma que a quantidade de números inteiros neste intervalo é $9.999 - 1.000 + 1 = 9.000$.

Como a escolha do número de quatro algarismos é equiprovável, resta apenas calcular a quantidade deles que são palíndromos. Para determinar um palíndromo de quatro algarismos, basta escolhermos os seus dois primeiros algarismos (pois estes determinam os outros dois). Como há 9 possibilidades para o algarismos das unidades de milhar e 9 para o algarismo das centenas, temos (novamente pelo princípio multiplicativo) $9 \cdot 10 = 90$ palíndromos.

Logo a probabilidade de um dos números sorteados ser palíndromo é: $\frac{90}{9.000} = \frac{1}{100} = 1\%$. □

Exemplo 15 (UNIRIO, adaptado)**.** *Um armário tem oito nichos, distribuídos em quatro níveis e com dois nichos em cada nível. Ocupando-se metade dos nichos, a probabilidade de que se tenha um nicho ocupado em cada nível é de:*

(a) $\frac{2}{35}$. | (b) $\frac{4}{35}$. | (c) $\frac{6}{35}$. | (d) $\frac{8}{35}$. | (e) $\frac{2}{35}$.

Solução. O número total de maneiras de ocupar 4 dos 8 nichos é igual a $\binom{8}{4} = 70$. Assim, essa é a quantidade de elementos de nosso espaço amostral. Como estamos distribuindo 4 objetos e temos 4 níveis, para que se tenha um nicho ocupado em cada nível, cada nível deverá ter exatamente um objeto. Sendo assim, cada caso favorável é obtido escolhendo, em cada nível, qual dos dois nichos será ocupado. Logo o número de casos favoráveis é igual a $2^4 = 16$, e a probabilidade pedida é igual a $\frac{2^4}{70} = \frac{8}{35}$. Assim, a alternativa correta é o item (d). □

Exemplo 16 (UFRJ, adaptado)**.** *Para determinada avaliação são sorteados* 3 *dentre* 5 *itens e, para ser aprovado, o aluno deve acertar pelo menos* 2 *dos* 3 *itens sorteados. Qual a probabilidade do aluno ser aprovado, se ele sabe resolver exatamente* 3 *dos* 5 *itens?*

Solução. Neste caso o nosso espaço amostral consiste de todos os conjuntos de 3 itens com os quais podemos montar a avaliação. Logo, o total de possibilidades é $\binom{5}{3} = 10$. Como o aluno sabe resolver 3 dos 5 itens, e ele precisa de 2 para ser aprovado, os casos favoráveis são aqueles em que os três itens selecionados para a prova incluem pelo menos 2 dos que o aluno sabe fazer. Há dois casos: (a) ou os 3 itens selecionados são exatamente os 3 itens que o aluno sabe resolver, o que pode acontecer de apenas 1 maneira; (b) ou, dentre os 3 itens selecionados, há exatamente 2 dos que o aluno sabe fazer (e 1 que ele não sabe fazer). A quantidade de maneiras em que o caso (b) pode acontecer é $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} = 6$. Logo a probabilidade pedida é $\frac{1+6}{10} = \frac{7}{10} = 70\%$. □

Dicas para o Professor

Como vimos neste texto, a noção de probabilidade mais difundida em textos de Ensino Médio, que é aquela definida como a razão entre o número de casos favoráveis pelo total de casos possíveis, é válida apenas quando os eventos simples são equiprováveis. É verdade que, na grande maioria dos exercícios abordados no Ensino Médio, estamos em um espaço equiprovável; inclusive, quando nada mais específico for informado, assume-se implicitamente que o espaço é equiprovável. A desvantagem de introduzir probabilidade usando esse conceito é que ele não pode ser generalizado de forma natural para espaços infinitos. Por isso, decidimos aqui começar com uma noção mais geral e tratar do caso equiprovável como um caso particular. A abordagem que utilizamos ainda é simples, mas é um pouco mais próximo do modo como se define probabilidade no Ensino Superior. A definição que usamos aqui dá margem para que o aluno, no futuro, estude espaços de probabilidade infinitos. Os axiomas para este caso incluem as propriedades que adotamos aqui, juntamente com algumas novas restrições.

Como de costume, recomendamos fortemente a resolução dos exercícios incluídos na apostila de exercícios deste módulo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.

2. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.