Material Teórico - Módulo de PROBLEMAS DOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS

Problemas dos Capítulos 5 e 6

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Novembro de 2021

1 Problemas do Capítulo 5

Exercício 1. *Uma turma tem 25 alunos. De quantas maneiras diferentes é possível escolher um monitor e um representante? E dois representantes? E três monitores?*

Solução. (a) Vamos supor que um aluno não pode ser monitor e representante ao mesmo tempo. Existem 25 maneiras de escolher um monitor. Para cada uma dessas escolhas, existem 24 maneiras de escolher o representante. Portanto, obtemos $25 \times 24 = 600$ maneiras diferentes.

(b) Vamos usar o resultado anterior. Em cada par encontrado no item (a), vamos transformar o representante em monitor. Obteremos assim todos os pares possíveis de monitores, mas cada par foi contado duas vezes, pois, se Guilherme e Simão forem os monitores, obteremos este par de ambas as escolhas "Guilherme é o monitor e Simão é o representante"e "Guilherme é o representante e Simão é o monitor". Portanto, o número de escolhas é a metade, ou seja, 300.

(c) O primeiro monitor pode ser escolhido de 25 maneiras diferentes. Depois que o primeiro foi escolhido, o segundo pode ser escolhido de 24 maneiras diferentes. Depois que os dois primeiros foram escolhidos, o terceiro pode ser escolhido de 23 maneiras diferentes. Se a ordem de escolha dos monitores fosse relevante, teríamos $25\times24\times23 = 13800$ maneiras de escolher. Mas não importa a ordem, só interessa saber que são três monitores. Se Fred, Maíra e Luana foram escolhidos como monitores, isso poderia ter ocorrido com:

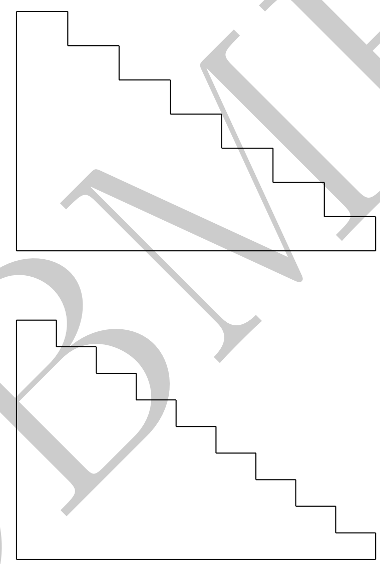
- Fred em primeiro lugar, Maíra em segundo, Luana em terceiro;
- Fred em primeiro lugar, Luana em segundo, Maíra em terceiro;
- Maíra em primeiro lugar, Fred em segundo, Luana em terceiro;
- Maíra em primeiro lugar, Luana em segundo, Fred em terceiro;
- Luana em primeiro lugar, Fred em segundo, Maíra em terceiro;
- Luana em primeiro lugar, Maíra em segundo, Fred em terceiro.

Contamos cada conjunto de monitores seis vezes no nosso processo, de modo que o número total de maneiras de escolher três monitores é $13800/6 = 2300$. □

Exercício 2. *Como você pode cortar 27 centímetros de uma fita de 144 centímetros sem uma régua?*

Solução. Dobre a fita no meio no sentido do comprimento. A fita dupla resultante tem 72 cm. Dobrando novamente resulta em uma fita quádrupla com 36 cm. Dobre mais duas vezes para obter uma fita com várias camadas de 9 cm. Agora desdobre três desses pedaços com 9 cm. O resultado é um pedaço de fita com 27 cm. □

Exercício 3. *Duas escadas de concreto, ambas com um metro de altura e dois metros de comprimento da base, estão completamente cobertas com uma tira de carpete. A primeira tem sete degraus e a segunda, nove. Qual das tiras é a mais longa?*



Solução. Os comprimentos dos carpetes são idênticos. Para encontrar os comprimentos dos carpetes, adicione a soma dos comprimentos das partes verticais de uma escada à soma das partes horizontais da mesma escada. Para ambas as escadas, a soma dos segmentos horizontais tem que ser igual ao comprimento total da base de 2 metros, enquanto que a soma dos segmentos verticais tem que ser igual à altura de 1 metro. Logo, o comprimento de cada carpete é 3 metros e cada carpete cobrirá qualquer das duas escadas. □

Exercício 4. *Mostre que se quinze crianças juntam 100 nozes, então há duas delas com a mesma quantidade de nozes.*

Solução. com várias camadas de 9 cm. Agora desdobre três desses pedaços com 9 cm. O resultado é um pedaço de fita com 27 cm. Solução do Problema 5.4. Suponha que cada criança juntou um número de nozes diferente de todas as outras. Escreva, em ordem crescente, a quantidade que cada uma juntou. A primeira juntou pelo menos 0 , a próxima pelo menos 1, e assim por diante. A última juntou pelo menos 14 . Portanto, as crianças juntaram pelo menos $0+1+2+3+\cdots+13+14$ nozes. Podemos calcular essa soma agrupando as parcelas convenientemente: $1+2+\cdots+13+14 = (1+14)+(2+13)+(3+12)+\cdots+(6+9)+(7+8) = 7 \times 15 = 105$. Mas 105 é maior do que 100 , logo nossa hipótese estava errada duas ou mais crianças juntaram o mesmo número de nozes. □

2 Problemas do Capítulo 6

Exercício 5. *O último algarismo do quadrado de um número inteiro pode ser 2?*

Solução. Para encontrar o último algarismo no quadrado de um inteiro, basta saber qual é o quadrado do último algarismo do número. Vamos construir uma lista:

Se um número termina em 0 , seu quadrado termina em 0.
Se um número termina em 1 , seu quadrado termina em 1.
Se um número termina em 2, seu quadrado termina em 4.
Se um número termina em 3, seu quadrado termina em 9.
Se um número termina em 4 , seu quadrado termina em 6.
Se um número termina em 5 , seu quadrado termina em 5.
Se um número termina em 6 , seu quadrado termina em 6.
Se um número termina em 7 , seu quadrado termina em 9.
Se um número termina em 8 , seu quadrado termina em 4.
Se um número termina em 9 , seu quadrado termina em 1.

Examinamos todos os casos possíveis e vimos que em nenhum caso o quadrado termina com o algarismo 2. □

Exercício 6. *"Temos 25 estudantes em nossa turma e cada uma tem exatamente 7 colegas da turma que são seus amigos."Por que esta afirmação é FALSA?*

Demonstração. Marque 25 pontos em um círculo para representar os estudantes da turma. Ligue os pares de amigos com segmentos de reta. Se todo estudante tem 7 colegas de turma que são amigos, cada ponto tem que ser extremidade de 7 segmentos de reta, de modo que temos $\frac{25\times 7}{2}$ segmentos de reta. O 2 no denominador é para evitar contar cada amizade duas vezes. Porém, o resultado obtido nos daria um número de segmentos que não é inteiro, o que é impossível. □

Exercício 7. *Carol está viajando de avião. Primeiro ela leu um livro; depois dormiu; depois olhou pela janela; depois bebeu suco de laranja. Cada uma destas atividades, exceto a primeira, levou metade do tempo da anterior. Ela começou a ler seu livro ao meio-dia e terminou o seu suco de laranja às 13:00 horas. Quando Carol começou a olhar pela janela?*

Solução. Vamos supor que Carol levou x minutos para beber seu suco de laranja. Isso significa que ela olhou pela janela durante $2x$ minutos, dormiu durante $4x$ minutos e leu seu livro durante $8x$ minutos. Carol gastou um total de 1 hora em tudo isso, logo

$$x + 2x + 4x + 8x = 60$$

Isso nos dá $15x = 60$, de modo que $x = 4$. Portanto, Carol começou a olhar pela janela $8x + 4x = 48$ minutos depois de meio-dia, ou seja, às 12:48 h. □

3 Problemas Extras

Os problemas a seguir foram retirados da Olimpíada de Maio que é uma competição internacional de matemática que é organizada pela Argentina e participam diversos países falantes de espanhol ou português.

Exercício 8. *(Maio 2018) São feitas mil divisões inteiras: o número 2018 é dividido por cada um dos inteiros de 1 a 1000. Desse modo, mil quocientes inteiros são obtidos com seus respectivos restos. Qual desses mil restos é o maior?*

Solução. Sabemos que ao dividirmos 2018 por um número n teremos um quociente q e um resto r que será necessariamente menor do que n. Dessa forma, iremos começar analisando as divisões de 2018 pelo maiores números permitidos pelo enunciado. Veja:

$$2018 = 2 \times 1000 + 18.$$

$$2018 = 2 \times 999 + 20.$$

$$2018 = 2 \times 998 + 22.$$

$$2018 = 2 \times 997 + 24.$$

$$\vdots$$

Perceba que a medida que vamos diminuindo o dividendo em uma unidade, o resto vai aumentando em duas unidades. Observe que esse padrão se mantém enquanto o quociente for 2. Para saber a partir de que ponto o quociente passa a ser 3, façamos a divisão $2018 \div 3$. Temos que

$$2018 = 3 \times 672 + 2.$$

Portanto, podemos analisar a divisão $2018 \div 673$:

$$2018 = 2 \times 673 + 672.$$

Agora lembre-se de que se $n \leq 672$ é um número inteiro, a divisão de 2018 por n será necessariamente um número menor do que 672. Portanto, 672 o maior resto que pode ser obtido de acordo com o que foi apresentado no enunciado. □

Exercício 9. *(Maio 2018) Em cada casa de um tabuleiro* 5×5 *um dos números* 2, 3, 4 *ou* 5 *é escrito de forma que a soma de todos os números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal seja sempre par. De quantas maneiras podemos preencher o quadro?*
Observação: *Um tabuleiro* 5×5 *tem exatamente* 18 *diagonais de tamanhos diferentes. Em particular, os cantos são diagonais de tamanho* 1.

Solução. Para facilitar a explicação, vamos identificar cada casa do tabuleiro utilizando um sistema de coordenadas semelhante ao do xadrez como ilustrado a seguir:

E					
D					
C					
B					
A					
	1	2	3	4	5

Em primeiro lugar, veja que a paridade de cada casa é a única condição importante para analisar que as somas das casas em cada linha, coluna ou diagonal é par. Dessa forma, vamos primeiro verificar quais são as possibilidades para as paridades das casas do tabuleiro que satisfazem às condições do enunciado.

Veja que as casas dos cantos (A1, A5, E1 e E5) são necessariamente pares. Agora iremos focar nossa atenção no conjunto de casas $M = \{A2, B5, E4, D1\}$ que estão pintadas de cinza na figura a seguir.

Estudaremos todas as possibilidades para a paridade dessas casas:

1. **Se todas as casas de M forem pares.** Consequentemente, as casas E2, B1, A4 e D5 são pares. Para verificar isso, basta olhar as diagonais formadas por duas casas. Agora, observando as linhas e as colunas que estão na borda do tabuleiro, verifica-se que as casas E3, A3, C1 e C5 são pares. Olhando para as diagonais com três casas, chegamos à conclusão de que as casas D2, D4, B2 e B4 são pares. Observando as linhas D e B; e colunas 2 e 4, concluí-se que D3, C2, C4 e B3 são pares. Por fim, observando-se a coluna do meio, tem-se que C3 é par.

E	P	P	P	P	P
D	P	P	P	P	P
C	P	P	P	P	P
B	P	P	P	P	P
A	P	P	P	P	P
	1	2	3	4	5

Portanto, nesse caso temos 2^{25} possibilidades, uma vez que há duas maneiras de se escolher os números que serão escritos em cada casa.

2. **Se todas as casas de M ímpares.** Utilizando um argumento análogo ao exposto no caso anterior, pode-se determinar a paridade de todas as demais casas do tabuleiro conhecendo-se apenas a paridade das casas cinzas. Chega-se ao seguinte padrão:

E	P	I	P	I	P
D	I	P	P	P	I
C	P	P	P	P	P
B	I	P	P	P	I
A	P	I	P	I	P
	1	2	3	4	5

Nesse caso, temos 2^{25} possibilidades.

3. **Se há exatamente uma casa de M ímpar.** Suponha que essa casa ímpar seja E4. Com um raciocínio análogo ao do caso anterior, pode-se determinar a paridade das demais casas chegando-se ao seguinte padrão:

E	P	P	I	I	P
D	P	I	P	P	I
C	P	I	P	P	I
B	P	P	I	I	P
A	P	P	P	P	P
	1	2	3	4	5

Portanto, nesse caso temos 2^{25} possibilidades, uma vez que há duas maneiras de se escolher os números que serão escritos em cada casa. Ainda podemos multiplicar esse valor por 4, para considerar as possíveis rotações do tabuleiro.

4. **Se há exatamente uma casa de M par.** Suponha que essa casa ímpar seja E4. Com um raciocínio análogo ao do caso anterior, pode-se determinar a paridade das demais casas chegando-se ao seguinte padrão:

E	P	I	I	P	P
D	I	I	P	P	P
C	P	I	P	P	I
B	I	P	I	I	I
A	P	I	P	I	P
	1	2	3	4	5

Portanto, nesse caso temos 2^{25} possibilidades, uma vez que há duas maneiras de se escolher os números que serão escritos em cada casa. Ainda podemos multiplicar esse valor por 4, para considerar as possíveis rotações do tabuleiro.

5. **Se exatamente duas casas de M forem pares.** Aqui, devemos observar dois sub-casos: quando as casas pares de M são opostas em relação ao centro e quando não são.

   (a) Suponha que E4 e B2 são pares. Pode-se concluir que o tabuleiro terá o seguinte padrão de paridade que possui duas rotações:

E	P	I	I	P	P
D	I	P	I	P	P
C	I	I	P	I	I
B	P	P	I	P	I
A	P	P	I	I	P
	1	2	3	4	5

(b) Suponha que E4 e B2 são pares. Pode-se concluir que o tabuleiro terá o seguinte padrão de paridade que possui quatro rotações:

E	P	I	I	P	P
D	I	I	I	I	P
C	P	P	P	P	P
B	I	I	I	I	P
A	P	I	I	P	P
	1	2	3	4	5

Portanto, podemos concluir que há $2^{25}(1+1+4+4+2+4) = 2^{25} \times 16$ tabuleiros que cumprem às condições do problema.

□

Exercício 10. *(Maio 2006) Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com 2 dígitos para o dia, 2 dígitos para o mês e 2 dígitos para o ano. Por exemplo, 01-01-01 corresponde a primeiro de janeiro de 2001 e 25-05-23 corresponde a 25 de maio de 2023. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são como os da figura abaixo.*

0 123456789

Se 0, 1, 2, 5 e 8 se refletem, respectivamente, em 0, 1, 5, 2 e 8, e os outros dígitos perdem sentido ao se refletirem, determine quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, correspondem também a uma data.

Solução. Como não podemos usar os dígitos $3, 4, 6, 7, 9$ para formar uma data que possa ser refletida, os únicos valores possíveis para os dois primeiros dígitos (os que marcam o dia) são: 01, 02, 05, 08, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 28. Para os dois próximos dígitos temos as seguintes possibilidades: 01, 02, 05, 08, 10, 11, 12. Por outro lado, apenas os pares 01, 10 e 11 também correspondem a um mês quando são refletidos. Para os dois últimos as possibilidades são: 10, 20, 50, 80, 01, 11, 21, 51, 81, 02, 12, 22, 52, 82. Pois seus reflexos devem corresponder a um dia. Logo, o total de datas pedidas é $14 \times 3 \times 14 = 588$. □

4 Sugestões aos Professores

Ao professor que deseja criar um círculo matemático em sua escola, recomendamos, além do livro [1], os livros [3, 2]. Nestes, o professor poderá encontrar problemas separados em conjuntos que tratam sobre o mesmo tema.

É importante que o professor entenda que a dinâmica de um encontro em um círculo matemático é diferente daquela que comumente encontra-se nas aulas ordinárias da escola. Em primeiro lugar, deve-se dar um tempo maior para que os alunos pensem em suas próprias soluções para os exercícios. Além disso, os alunos devem ser convidados a exporem suas ideias (mesmo que parcialmente incompletas ou inconsistente) aos colegas. A ideia é transformar a solução de um problema em um debate construtivo em que mais de uma pessoa possa colaborar para que a turma encontre uma solução adequada.

Observe que muitas das situações apresentadas nessa lista possuem diversas soluções ou podem ser modificados para gerar novas formas de exploração das ideias utilizadas na solução. Recomendamos que os professores utilizem essa estratégia para manter a turma motivada ao longo da aula.

Referências

[1] Sergey Dorichenko. *Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana.* IMPA, 2016.

[2] Dmitri Fomin, Ilia Itenberg, and Sergey Genkin. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa.* IMPA, 2012.

[3] Bruno Holanda and Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Álgebra, Aritmética e Combinatória.* IMPA, 2018.