

Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Teorema de Tales - Parte I

Nono Ano do Ensino Fundamental

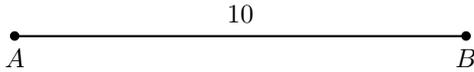
Prof. Marcelo Mendes de Oliveira
Prof. Antonio Caminha M. Neto



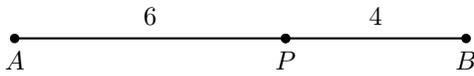
1 Razão de segmentos

Para organizar as ideias, vamos iniciar com o seguinte exemplo.

Exemplo 1. Considere um segmento AB de tamanho 10.



Se quisermos achar um ponto P , interno ao segmento AB e que o divida na razão $3 : 2$ a partir de A , então dividimos AB em $3 + 2 = 5$ partes e marcamos P deixando 3 partes à esquerda e 2 à direita.

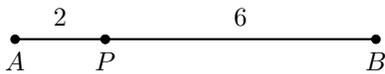


Assim, a razão $3 : 2$ aparece em $\frac{AP}{PB} = \frac{6}{4}$.

Deixando os valores específicos do exemplo acima de lado (valores estes que serviram apenas para simplificar a ideia que queremos desenvolver), vemos que $\frac{AP}{PB}$ denota a razão em que o ponto P divide o segmento AB . Observe que o ponto P aparece tanto no numerador quanto no denominador; além disso, os extremos do segmento (no caso, os pontos A e B) aparecem um no numerador e o outro no denominador.

Exemplo 2. Divida um segmento AB , que mede 8cm , na razão $1 : 3$ a partir de A .

Solução. Uma vez que queremos dividir AB na razão $1 : 3$, vamos dividi-lo em quatro partes de tamanho 2cm cada, deixando uma de tais partes à esquerda do ponto P de divisão. Assim, P está a uma distância 2cm de A e 6cm de B .



□

Exemplo 3. Divida um segmento AB , que mede 8cm , na razão $1 : \sqrt{2}$ a partir de A .

Solução. Queremos dividir AB na razão $1 : \sqrt{2}$, mas, para tanto, não podemos dividi-lo em $1 + \sqrt{2}$ partes, pois essa quantidade não é um número inteiro. Mas isso não é problema. Basta utilizarmos a definição, isto é, basta observarmos que queremos um ponto P no interior de AB tal que

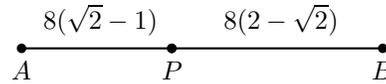
$$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} AP\sqrt{2} = PB &\Rightarrow AP(\sqrt{2} + 1) = AP + PB \\ &\Rightarrow AP(\sqrt{2} + 1) = AB = 8 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$AP = \frac{8}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 8(\sqrt{2} - 1).$$



□

Exemplo 4. Dado um segmento AB , chama-se segmento áureo de AB o segmento AP , com P em AB , tal que $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$. Se $AB = 10$, o comprimento de AP vale:

- (a) $5\sqrt{5} - 5$.
- (b) $5\sqrt{3} - 5$.
- (c) $5\sqrt{5} + 5$.
- (d) $5\sqrt{3} - 5$.
- (e) 5 .

Solução. Faça $AP = x$. Pelas condições do enunciado, temos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB} &\Leftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{x}{10 - x} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 100 - 10x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 10x - 100 = 0, \end{aligned}$$

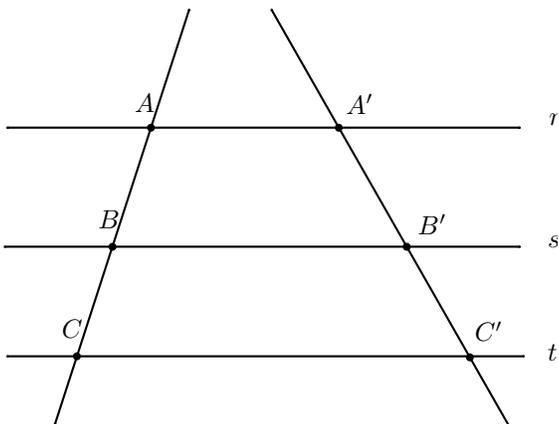
equação cuja solução positiva é $5\sqrt{5} - 5$. Portanto, a resposta correta é o item (a). □

2 O teorema de Tales

O teorema de Tales é um resultado fundamental em Geometria Euclidiana plana, e pode ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 5 (Tales). Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhamos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então,

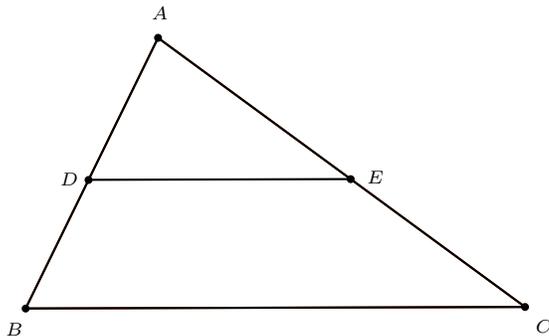
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$



A demonstração deste teorema em toda sua generalidade necessita de elaborações que estão além dos propósitos destas notas; nesse sentido, sugerimos consultar a referência [1]. Contudo, na próxima seção apresentaremos a demonstração de um caso particular relevante.

Nesta seção, vamos nos concentrar em aprender como utilizar o teorema de Tales, aplicando-os em alguns exemplos simples.

Exemplo 6. Na figura abaixo, os segmentos BC e DE são paralelos, $AB = 15\text{cm}$, $AD = 5\text{cm}$ e $AE = 6\text{cm}$. Calcule a medida em centímetros do segmento CE .



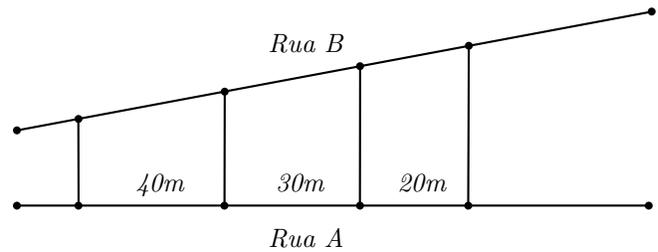
Solução. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow \frac{5}{15} = \frac{6}{AC} \\ &\Leftrightarrow AC = 18 \\ &\Leftrightarrow CE = 12. \end{aligned}$$

□

Exemplo 7. Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura abaixo. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente de cada

lote para a rua B, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?

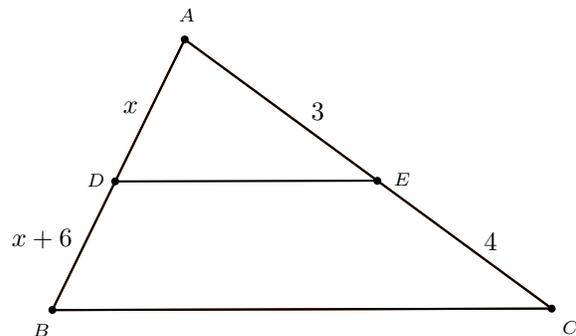


Solução. Como o teorema de Tales garante a proporcionalidade entre as medidas de segmentos determinados por paralelas em transversais, podemos representar as medidas das frentes para a rua B por $4k$, $3k$ e $2k$. Assim,

$$\begin{aligned} 4k + 3k + 2k &= 180 \Leftrightarrow 9k = 180 \\ &\Leftrightarrow k = 20. \end{aligned}$$

Portanto, as medidas das frentes dos lotes para a rua B são 80m, 60m e 40m. □

Exemplo 8. Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC determina o ponto D em AB e E em AC . Sabendo-se que $AD = x$, $BD = x + 6$, $AE = 3$ e $EC = 4$, calcule o comprimento do lado AB do triângulo ABC .



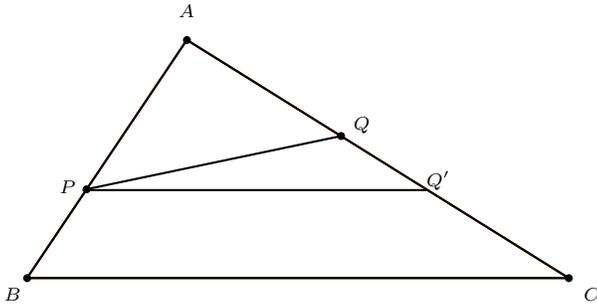
Solução. Pelo teorema de Tales, temos

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow 4x = 3x + 18 \\ &\Leftrightarrow x = 18. \end{aligned}$$

□

Exemplo 9. Considere o triângulo ABC e os pontos P e Q sobre os lados AB e AC , respectivamente. Se $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, mostre que $PQ \parallel BC$.

Solução. Suponha que PQ não seja paralelo a BC (veja a figura abaixo). Trace, então, uma paralela PQ' por P a BC , como mostrado na figura.



Pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ'}{Q'C}$$

Mas, como a igualdade $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ é satisfeita por hipótese, temos

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AQ'}{Q'C}$$

Portanto, os pontos Q e Q' são distintos e dividem o lado AC na mesma razão, o que é absurdo.

Logo, PQ é paralelo a BC . \square

3 A demonstração de um caso particular do teorema de Tales e mais aplicações

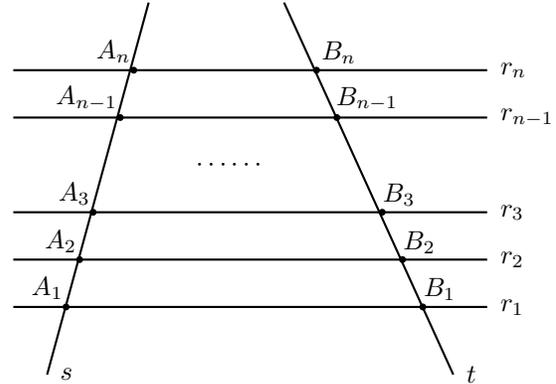
Conforme prometido na seção anterior, nesta seção apresentaremos a demonstração de um caso particular relevante do teorema de Tales. Esse é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 10 (caso particular de Tales). *Sejam r , s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Se m e n são naturais tais que $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, então $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$. Em particular,*

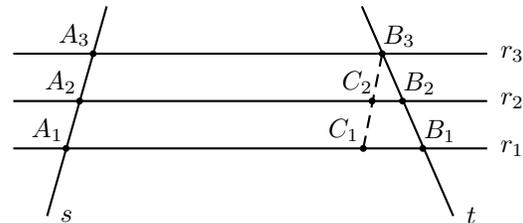
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Para a demonstração desse caso particular do teorema de Tales, precisamos considerar, inicialmente, o seguinte resultado auxiliar.

Lema 11. *Sejam n um número natural, r_1, r_2, \dots, r_n retas paralelas e s e t retas transversais a r_1, r_2, \dots, r_n , as quais intersectam essas n retas nos pontos A_1, A_2, \dots, A_n e B_1, B_2, \dots, B_n , conforme mostrado na figura a seguir. Se $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$, então $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n$.*



Prova. É suficiente provar que $A_1A_2 = A_2A_3 \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3$, uma vez que as demais igualdades podem ser obtidas de forma análoga. Para tanto (veja a figura abaixo), trace por B_3 uma paralela s' à reta s , e sejam C_1 e C_2 seus pontos de interseção com as retas r_1 e r_2 , respectivamente.

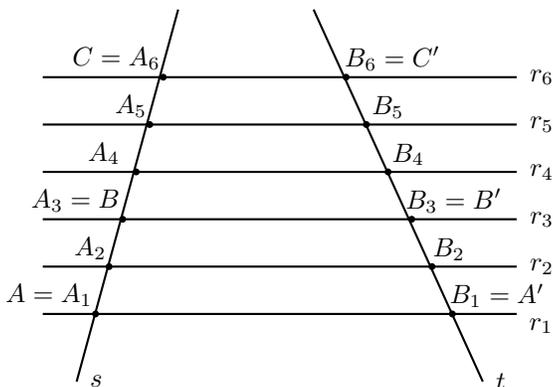


Como $A_3B_3 \parallel A_2C_2 \parallel A_1C_1$ e $A_1A_3 \parallel C_1B_3$, temos que $A_1C_1C_2A_2$ e $A_2C_2B_3A_3$ são paralelogramos. Logo, $C_1C_2 = A_1A_2$ e $A_2A_3 = C_2B_3$, e segue de $A_1A_2 = A_2A_3$ que $C_1C_2 = C_2B_3$. Agora, no triângulo $C_1B_1B_3$, o ponto C_2 é médio do lado C_1B_3 e $C_2B_2 \parallel C_1B_1$. Portanto, pelo teorema da base média, B_2 é ponto médio do lado B_1B_3 , ou, o que é o mesmo, $B_1B_2 = B_2B_3$. \square

Podemos, finalmente, demonstrar o caso particular do teorema de Tales que é o conteúdo do teorema anterior.

Prova do Teorema 10. Novamente por simplicidade, façamos a prova no caso em que $m = 2$ e $n = 3$; novamente, a demonstração no caso geral é completamente análoga. Nesse caso, supomos que $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ e queremos mostrar que $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2}{3}$. Para tanto (veja a figura abaixo), divida o segmento AC em $2 + 3 = 5$ partes iguais, obtendo pontos $A_1 = A$, $A_2, A_3 = B$, $A_4, A_5, A_6 = C$ sobre s e $B_1 = A'$, $B_2, B_3 = B'$, $B_4, B_5, B_6 = C'$ sobre t . Como $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_5A_6$, segue do lema anterior que $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_5B_6 = \ell$. Logo,

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2\ell}{3\ell} = \frac{2}{3}$$



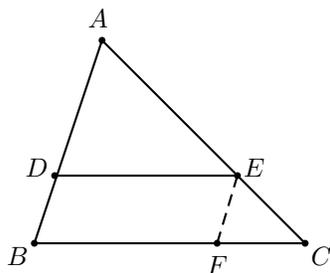
□

Observe que, o caso particular do teorema de Tales demonstrado acima não engloba as situações em que $\frac{AB}{BC}$ é igual a um número irracional ($\sqrt{2}$, por exemplo). Nesses casos, assumiremos a validade do teorema sem demonstração, referindo o leitor a [1] para os detalhes.

A proposição a seguir traz uma consequência muito importante do teorema de Tales. De fato, ela é o primeiro exemplo de uma *semelhança de triângulos*, conceito que será muito importante nas próximas aulas.

Proposição 12. *Se, sobre os lados AB e AC de um triângulo ABC, marcarmos pontos D e E tais que DE e BC são paralelos, então os lados dos triângulos ABC e ADE são respectivamente proporcionais. Mais precisamente,*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$



Prova. O teorema de Tales dá a primeira das igualdades do enunciado. Para a segunda igualdade trace, pelo ponto E (veja a figura acima), a reta paralela à reta AB, e marque seu ponto F de interseção com o lado BC. Então, por um lado, o quadrilátero BFED tem lados opostos paralelos, logo, é um paralelogramo e, daí, $BF = DE$. Por outro, utilizando novamente o teorema de Tales (aplicado às paralelas AB e EF, com transversais AC e BC), obtemos

$$\frac{CF}{BC} = \frac{CE}{AC}.$$

Então,

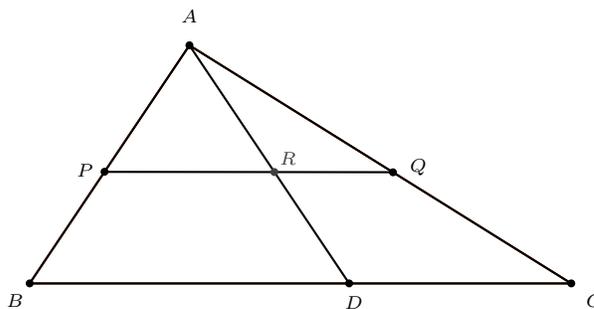
$$\begin{aligned} \frac{BC}{DE} &= \frac{BC}{BC - CF} = \frac{1}{1 - \frac{CF}{BC}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{CE}{AC}} = \frac{AC}{AC - CE} = \frac{AC}{AE}. \end{aligned}$$

□

4 Mais aplicações

Esta última seção mostrará como o teorema de Tales, aplicado em conjunção com o resultado da proposição anterior, nos permite abordar problemas bem mais difíceis.

Exemplo 13. *Considere o triângulo ABC e uma ceviana AD, como D sobre o lado BC. Sejam P e Q pontos sobre os lados AB e AC, tais que $PQ \parallel BC$. Se AD intersecta PQ em R, mostre que R divide o segmento PQ na mesma razão em que D divide o segmento BC.*

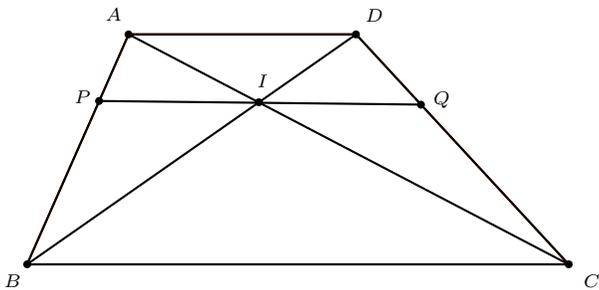


Solução. Aplicando a proposição anterior aos triângulos APR e ABD, obtemos $\frac{PR}{BD} = \frac{AP}{AB}$. Por outro lado, pelo teorema de Tales, temos $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$. Agora, aplicando a proposição anterior aos triângulos ARQ e ADC, obtemos $\frac{AQ}{AC} = \frac{RQ}{DC}$. Combinando as três igualdades acima, segue que $\frac{PR}{BD} = \frac{RQ}{DC}$ ou, o que é o mesmo,

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{BD}{DC}.$$

Mas isso significa exatamente que R divide PQ na mesma razão em que D divide o lado BC. □

Exemplo 14. *Seja ABCD um trapézio de bases AD e BC. Seja I a interseção das diagonais AC e BD. Nas notações da figura a seguir, se o segmento PQ é paralelo às bases do trapézio e passa por I, mostre que $PI = QI$.*



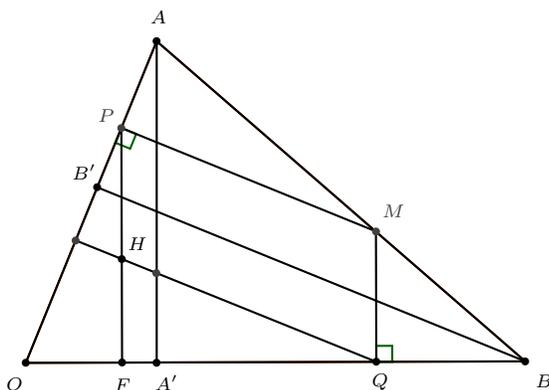
Prova. Aplicando a Proposição 12 aos triângulos ABD e PBI , obtemos $\frac{AD}{PI} = \frac{AB}{PB}$. Por outro lado, pelo Teorema de Tales, temos $\frac{AB}{PB} = \frac{DC}{QC}$. Agora, aplicando a Proposição 12 aos triângulos DAC e QIC , segue que $\frac{DC}{QC} = \frac{AD}{IQ}$. Combinando as três igualdades acima, obtemos finalmente

$$\frac{AD}{PI} = \frac{AD}{IQ},$$

de forma que $PI = IQ$. \square

Para o próximo exemplo, recordamos que, em todo triângulo, as três alturas passam por um mesmo ponto, conhecido como o **ortocentro** do triângulo.

Exemplo 15. É dado um triângulo OAB , tal que $\widehat{AOB} = \alpha < 90^\circ$. Seja M um ponto sobre o lado AB , e denote por P e Q os pés das perpendiculares baixadas de M aos lados OA e OB , respectivamente. Se H é o ortocentro do triângulo OPQ , mostre que H pertence ao segmento $A'B'$, onde A' e B' denotam os pés das alturas do triângulo ABC , traçadas respectivamente a partir dos vértices A e B .



Prova. Como PH e MQ são perpendiculares a OB , elas são paralelas. Analogamente QH e MP são perpendiculares a OA , logo, também paralelas. Portanto, o quadrilátero $PHQM$ tem seus pares de lados opostos paralelos, logo, é um paralelogramo.

Pelo teorema de Tales, com $B'B \parallel PM$, temos $\frac{B'P}{B'A} = \frac{BM}{BA}$. Por outro lado, aplicando a Proposição 12 aos triângulos BMQ e BAA' , temos $\frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AA'}$. Combinando as duas relações acima e levando em conta que $MQ = PH$ (uma vez que $PHQM$ é um paralelogramo), chegamos a

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{MQ}{AA'} = \frac{PH}{AA'}. \quad (1)$$

Agora, seja K o ponto de interseção entre os segmentos PH e $B'A'$ (não mostramos K na figura acima). Como $K \in PH$ e $PH \parallel AA'$, temos $PK \parallel AA'$. Portanto, aplicando uma vez mais a Proposição 12, desta feita aos triângulos $B'PK$ e $B'AA'$, obtemos

$$\frac{B'P}{B'A} = \frac{PK}{AA'}. \quad (2)$$

Combinando (1) e (2), chegamos à relação

$$\frac{PH}{AA'} = \frac{PK}{AA'},$$

de onde segue que $PH = PK$ e, daí, $H = K$. Em particular, $H \in A'B'$. \square

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em três encontros de 50 minutos cada. É muito importante apresentar a demonstração do caso particular do teorema de Tales discutido nestas notas, pois o aluno deve perceber que ele não é um resultado auto-evidente, e que a validade de novos fatos geométricos realmente se apoia na validade de outros resultados mais simples, já estudados. A referência [2] contém vários exemplos simples envolvendo o teorema de Tales. Para o leitor interessado em aplicações mais elaboradas, sugerimos a referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.
2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2013.