Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Diferenciação Implícita - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de Junho de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Temos estudado, preponderantemente, funções f cujas regras exprimem $f(x)$ *explicitamente* em termos de x. Exemplos disso são

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - x}{\sqrt[5]{x^4+1}}$$

ou

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - \ln(2^x + |x|).$$

Todavia, há situações em que, ao invés da regra explícita de f, conhecemos apenas uma relação $F(x, y) = 0$ satisfeita pelos pontos $(x, f(x))$ de seu gráfico [1]. Nesse contexto, se uma função $y = f(x)$ satisfizer a relação $F(x, y) = 0$ em todos os pontos x de seu domínio, diremos que f *está definida implicitamente por* $F(x, y) = 0$.

A título de exemplo, tomemos $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, ou seja, consideremos a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ $(*)$. Nesse caso, podemos resolver a equação para y:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

em que a raiz quadrada só tem sentido em $\mathbb{R}$ para $1 - x^2 \geq 0$, isto é, para $x \in [-1, 1]$.

Assim, as funções $f_+, f_- : [-1, 1] \to [-1, 1]$, dadas *explicitamente* por $f_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$, estão definidas *implicitamente* pela relação $(*)$, pois $x^2 + f_\pm(x)^2 - 1 = 0$ para todo $x \in [-1, 1]$.

Contudo, existem funções f, definidas implicitamente por uma relação $F(x, y) = 0$, cujas regras *não podem* ser explicitadas de uma forma conveniente. Esse é o caso de uma função $y = f(x)$ definida implicitamente por

$$y^5 - y - x = 0. \tag{1}$$

[1] Formalmente, F é uma função real definida em um subconjunto do plano.

Muito embora seja possível provar a existência de funções deriváveis satisfazendo (1) (por exemplo, procurando intervalos nos quais a função polinomial $y \mapsto y^5 - y$ tenha derivada não nula e, portanto, admita inversa derivável), também é verdade que nenhuma dessas funções pode ser expressa por uma regra envolvendo apenas operações algébricas elementares ($+$, $-$, $\cdot$, $\div$ e $\sqrt[n]{\ }$) envolvendo polinômios em x. (Note como essa situação contrasta com a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$, cuja solução f_+ se expressa facilmente a partir da raiz quadrada do polinômio $1 - x^2$.)

Desse modo, o cálculo da derivada de uma função (derivável) f, definida implicitamente por $F(x, y) = 0$, seguindo a estratégia

(i) explicite $f(x)$;

(ii) derive $f(x)$

pode ser inviável, por conta da etapa (i). Em verdade, mesmo que a etapa (i) seja exequível, as fórmulas para $f(x)$ podem ser bem complicadas [2].

Uma forma de driblar esses obstáculos e obter $f'(x)$ é, simplesmente, *derivar a relação* $F(x, y) = 0$ *com respeito a* x, *lembrando que a relação define* y *como função derivável de* x; esse processo é denominado *diferenciação implícita.* Com ajuda das regras de derivação, em especial a *regra da cadeia*, isso levará a uma fórmula para $f'(x)$ em termos de x e de $f(x)$.

Por exemplo, se diferenciarmos implicitamente a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ levando em conta que estamos considerando y como uma função derivável de x, obteremos $2x + 2yy' = 0$, de onde segue facilmente que

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{2}$$

A razão no 2º membro é possível desde que $-1 < x < 1$, pois essa condição, na presença da relação $x^2 + y^2 = 1$, equivale a

[2] Confira o Exemplo 2 e a Observação 3.

$y \neq 0$. Note que a função $f_+(x) = \sqrt{1-x^2}$, definida implicitamente por $x^2 + y^2 - 1 = 0$, é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$, valendo $f'_+(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para cada $x \in (-1, 1)$; assim,

$$f'_+(x) = -\frac{x}{f_+(x)},$$

o que está de acordo com (2).

Para mais um exemplo, a relação

$$x^3y + xy^3 + 7 = 0,$$

quando diferenciada implicitamente, retorna

$$(3x^2y + x^3y') + (y^3 + 3xy^2y') = 0,$$

de maneira que

$$y' = -\frac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}.$$

Via de regra, após diferenciarmos implicitamente a relação $F(x, y) = 0$, obteremos uma outra relação que pode ser encarada como uma equação do 1º grau em y'. Resolvida essa equação, chegaremos a uma igualdade do tipo $y' = G(x, y)$. Nos exemplos anteriores, em que $F(x, y) = x^2+y^2-1$ e $F(x, y) = x^3y + xy^3 + 7$, obtivemos $G(x, y) = -x/y$ e $G(x, y) = -\frac{3x^2y+y^3}{x^3+3xy^2}$, respectivamente.

Nos exemplos da próxima seção, uma relação $F(x, y) = 0$ será dada e o leitor deve assumir que tal equação determina alguma função derivável $y = f(x)$, definida em um intervalo não degenerado. Como já comentamos, a aplicação das regras de derivação à expressão $F(x, y)$ fornecerá uma relação do tipo $f'(x) = G(x, f(x))$, a qual interpretamos como solução do problema "Encontre a derivada da função $y = f(x)$, definida implicitamente pela relação $F(x, y) = 0$".

O estudo de condições suficientes sobre a função F a fim de que a relação $F(x, y) = 0$ defina y como uma função derivável de x e tendo por domínio algum intervalo não degenerado será feito na segunda parte deste material.

2 Exemplos

Exemplo 1. *Determine a derivada da função $y = y(x)$, sabendo que*

$$xy^2 - 2x^2y + x^4 = 0.$$

Solução. Diferenciando implicitamente a relação dada, obtemos

$$(y^2 + 2xyy') - (4xy + 2x^2y') + 4x^3 = 0,$$

de modo que

$$(y^2 - 4xy + 4x^3) + (2xy - 2x^2)y' = 0.$$

Resolvendo essa equação para a derivada y', chegamos a

$$y' = -\frac{y^2 - 4xy + 4x^3}{2xy - 2x^2}.$$

□

Exemplo 2. *Determine dy/dx, sabendo que $x^3 + y^3 = 3xy$.*

Solução. Derivando ambos os membros da relação do enunciado com respeito a x, vem que

$$3x^2 + 3y^2y' = 3(y + xy').$$

Portanto,

$$(y^2 - x)y' = y - x^2,$$

logo,

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

□

Observação 3. *A partir da fórmula de Cardano para cúbicas, é possível explicitar y na relação do exemplo anterior. Com efeito, uma das soluções possíveis é*

$$y = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - x^3}}. \tag{3}$$

Essa fórmula mostra claramente a vantagem da estratégia de diferenciação implícita: imagine só o trabalho de derivar diretamente o segundo membro acima!

A curva no plano formada pelos pares ordenados (x, y) que satisfazem a relação $x^3 + y^3 = 3xy$ é conhecida como o folium de Descartes*; a figura a seguir a esboça como a curva de cor verde: Veja que a função $y = y(x)$ dada pelo segundo*

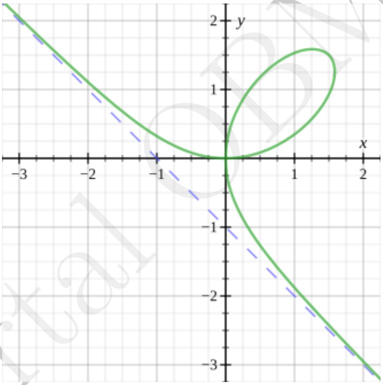


Figura 1: o folium de Descartes.

membro de (3) não corresponde a toda a curva!

Exemplo 4. *Ache dy/dx, sabendo que $y^2 = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$.*

Solução. Começamos observando que

$$\frac{d(y^2)}{dx} = 2yy', \quad \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

e, pela regra da cadeia,

$$\frac{d(\text{sen}(xy))}{dx} = \cos(xy) \cdot (y + xy').$$

Assim, diferenciando implicitamente a relação do enunciado, encontramos

$$2yy' = 2x + \cos(xy) \cdot (y + xy')$$

ou, equivalentemente,

$$(2y - x\cos(xy))y' = 2x + y\cos(xy).$$

A conclusão é de que

$$y' = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}.$$

$\square$

Exemplo 5. *Ache a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = y(x)$ no ponto $(\pi, 0)$, se*

$$\cos(x + y) + e^{x-\pi} = \text{tg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Solução. Derivando ambos os membros da igualdade acima em relação a x, obtemos

$$-\text{sen}(x + y) \cdot (1 + y') + e^{x-\pi} = \sec^2\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xy' - y}{x^2}.$$

Realizando as substituições $x = \pi, y = 0$, chegamos a

$$-\text{sen}(\pi + 0) \cdot (1 + y'(\pi)) + e^{\pi-\pi} = \sec^2\left(\frac{0}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi \cdot y'(\pi) - 0}{\pi^2},$$

de onde segue facilmente que $y'(\pi) = \pi$. Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = y(x)$ no ponto $(\pi, 0)$ se escreve como $Y - 0 = y'(\pi) \cdot (X - \pi)$, isto é,

$$Y = \pi(X - \pi).$$

$\square$

Exemplo 6. *Seja y uma função definida implicitamente pela relação*

$$y^5 - y = x.$$

Supondo que o domínio de y seja a semirreta $(1, +\infty)$, mostre que y é crescente e côncava.

Solução. Primeiramente, observe que $x > 1 \Rightarrow y > 1$. Com efeito,

$$x > 1 \Rightarrow y(y^4 - 1) = y^5 - y = x > 1.$$

Se tivéssemos $y < -1$, valeria $y^4 - 1 > 0$, de modo que a expressão $y(y^4 - 1)$ seria negativa, o que não é verdade. Caso fosse $|y| \leq 1$, também teríamos $|y^4 - 1| \leq 1$, de onde seguiria a desigualdade $|y(y^4 - 1)| \leq 1$, o que, mais uma vez, contrariaria a relação $y(y^4 - 1) > 1$. Portanto, se $x > 1$, a única alternativa possível é $y > 1$.

Agora, diferenciando implicitamente a relação do enunciado, vem que $5y^4y' - y' = 1$ e, daí,

$$y' = \frac{1}{5y^4 - 1}.$$

Como estamos assumindo que a semirreta $(1, +\infty)$ é o domínio da função $y = y(x)$, vimos no parágrafo anterior que $y(x) > 1$, logo, $5y(x)^4 - 1 > 0$. Portanto,

$$y'(x) = 1/(5y(x)^4 - 1) > 0$$

para cada $x > 1$. Em particular, y é crescente.

Por fim, para calcular a 2ª derivada de y, derivamos a relação $y' = (5y^4 - 1)^{-1}$ com respeito a x (com o auxílio da regra da cadeia — aqui não há diferenciação implícita), obtendo

$$y'' = -(5y^4 - 1)^{-2} \cdot 20y^3y'.$$

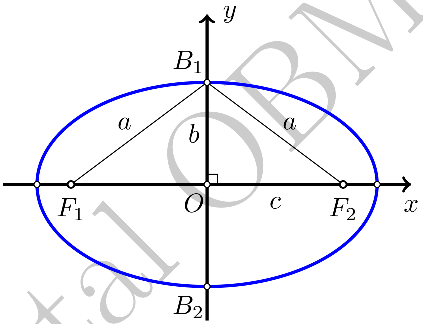
Na igualdade acima, todos os fatores do 2º membro, após o sinal negativo, são positivos, de onde se conclui que $y''(x) < 0$ para cada $x > 1$. Dessa forma, y é uma função côncava. $\square$

Exemplo 7. *Prove a propriedade refletora da elipse:* toda reta normal a uma elipse em um ponto P (com exceção dos casos em que P é uma extremidade do eixo maior) bissecta o ângulo com vértice P e cujos lados contém os focos da elipse.

Solução. Em um sistema cartesiano apropriado, podemos supor[3] que a elipse é dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$

em que a, b são, respectivamente, as medidas de seus eixos maior e menor; dessa forma, pondo $c := \sqrt{a^2 - b^2}$, os focos da elipse serão os pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ (veja a figura a seguir).



Diferenciando implicitamente a equação (4), vem que

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0,$$

de onde segue facilmente a relação

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Conforme sabemos, $y'(x)$ fornece a inclinação da reta tangente à elipse no ponto $P := (x, y(x))$. Consideremos, agora,

[3]Veja, por exemplo, o material teórico da aula "*Elipses*", do módulo "*Cônicas*", do 3º ano do Ensino Médio.

dois casos separadamente:

(i) Se $x = 0$, a reta tangente é horizontal, logo, a reta normal será vertical e, portanto, cortará o eixo das abscissas na origem. Esse caso corresponde a $P = B_1$ ou $P = B_2$, quando é imediato que $\overrightarrow{PO}$ bissecta o ângulo $\measuredangle F_1PF_2$.

(ii) Se $x \neq 0$, a Geometria Analítica elementar ensina que $-\frac{1}{y'(x)} = \frac{a^2y(x)}{b^2x}$ dá a inclinação da reta normal à elipse naquele mesmo ponto. Desse modo, uma equação da reta normal à elipse no ponto P é

$$Y - y = \frac{a^2y}{b^2x} \cdot (X - x).$$

Sendo $Q := (k, 0)$ o ponto em que essa reta corta o eixo das abscissas (faça uma figura para acompanhar), temos

$$0 - y = \frac{a^2y}{b^2x}(k - x),$$

ou seja,

$$k - x = -\frac{b^2x\cancel{y}}{a^2\cancel{y}};$$

então,

$$\begin{aligned} k = x - \frac{b^2x}{a^2} &= \frac{a^2x - b^2x}{a^2} \\ &= \frac{(a^2 - b^2)x}{a^2} = \frac{c^2x}{a^2}. \end{aligned}$$

Se provarmos que o ponto Q é interior ao segmento F_1F_2 e o divide na razão $\overline{F_1P}/\overline{PF_2}$, a demonstração estará encerrada, pelo Teorema da Bissetriz.

Para ver que o ponto Q é interior ao segmento F_1F_2, basta mostrar que $|k| < c$. Realmente, como $|x| \leq a$ e $c < a$, temos

$$|k| = |x| \cdot \frac{c^2}{a^2} \leq a \cdot \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{a} < c.$$

Por fim, precisamos mostrar que o ponto Q divide o segmento F_1F_2 na razão $\overline{F_1P}/\overline{PF_2}$. De início, como $Q = (k, 0)$, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, temos $\overline{F_1Q} = k - (-c) = k + c$ e $\overline{QF_2} = c - k$, de sorte que o ponto Q divide F_1F_2 na razão $(k + c)/(c - k)$; então,

$$\frac{\overline{F_1Q}}{\overline{QF_2}} = \frac{\frac{c^2x}{a^2} + c}{c - \frac{c^2x}{a^2}}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{\overline{F_1Q}}{\overline{QF_2}} = \frac{cx + a^2}{a^2 - cx}. \tag{5}$$

Agora, calculemos a distância de F_1 ao ponto P. Para isso, utilizaremos o fato, decorrente imediatamente da equação da elipse, de que $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$.

$$\begin{aligned}
\overline{F_1P} &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} \\
&= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2(1 - x^2/a^2)} \\
&= \sqrt{(1 - b^2/a^2)x^2 + 2cx + c^2 + b^2} \\
&= \sqrt{(a^2 - b^2)x^2/a^2 + 2cx + a^2} \\
&= \sqrt{c^2x^2/a^2 + 2cx + a^2} \\
&= \sqrt{\frac{c^2x^2 + 2cxa^2 + a^4}{a^2}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{cx + a^2}{a}\right)^2} \\
&= \frac{cx + a^2}{a},
\end{aligned}$$

uma vez que (verifique!) $cx + a^2 > 0$. De forma análoga, temos

$$\overline{PF_2} = \frac{a^2 - cx}{a},$$

de onde segue, por (5), que

$$\frac{\overline{F_1P}}{\overline{PF_2}} = \frac{\frac{cx+a^2}{a^2}}{\frac{a^2-cx}{a^2}} = \frac{cx + a^2}{a^2 - cx} = \frac{\overline{F_1Q}}{\overline{QF_2}}.$$

□

Dicas para o Professor

Ao apresentar os demais exemplos da Seção 2, é instrutivo o professor utilizar algum *software* de computação simbólica para esboçar as curvas planas definidas pelas relações dadas (conforme fizemos com o folium de Descartes). Nesse sentido, uma opção interessante é o *Wolfram Alpha* (veja [2]), que é de fácil utilização e pode ser acessado online.

Por exemplo, para esboçar o folium de Descartes, após acessar a página do Wolfram Alpha, escolha a opção "*Plotting & Graphics*"; em seguida, em "*3D Plots*", clique em "*Plot a function in two variables*" e digite `plot x^3+y^3=3xy` .

Sugestões de Consulta Complementar

1. G. B. Thomas. *Cálculo, vol. 1.* 11ª ed. São Paulo: Pearson, 2009.

2. Wolfram Alpha. `https://www.wolframalpha.com/`