Material Teórico - Módulo Cônicas

Elipses

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Conforme mencionamos na primeira aula deste módulo, elipses são as curvas planas obtidas como seções de um cone por planos que intersectam uma única folha do cone e não paralelos a uma geratriz do cone a seu eixo. Nesta aula, entretanto, apresentamos tais curvas de uma maneira diferente[1]

Para se construir uma elipse precisamos escolher dois pontos F_1 e F_2 de um plano, os quais chamaremos de *focos* da elipse, e um número real L maior do que a distância entre F_1 e F_2. Feito isso, temos que:

> Uma **elipse** de **focos** F_1 e F_2 é o conjunto de pontos P do plano tais que a soma das distâncias de P a F_1 e F_2 é uma constante, digamos igual ao número L escolhido.

Ao longo desta aula, se P e Q são pontos no plano, denotaremos por $\overline{PQ}$ o comprimento do segmento PQ. Vamos destacar agora os *elementos principais* de uma elipse (veja a Figura 1).

Focos: os pontos F_1 e F_2.

Distância focal: a distância entre F_1 e F_2, que será denotada por $2c$. Assim, $2c = \overline{F_1F_2}$.

Centro: o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, denotado por C. Veja então que $\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$.

Reta focal: a reta que passa pelos focos.

Vértices: os pontos A_1, A_2, B_1, B_2 da elipse, obtidos como segue: a reta focal intersecta a elipse em dois pontos, que chamaremos de A_1 e A_2; por outro lado, a reta que passa por C e é perpendicular à reta focal intersecta a elipse em outros dois pontos, que chamaremos de B_1 e B_2.

Eixo maior: o segmento A_1A_2. Vamos denotar seu comprimento por $2a$. Assim, $2a = \overline{A_1A_2}$.

Eixo menor: o segmento B_1B_2. Denotamos seu comprimento por $2b$. Assim, $2b = \overline{B_1B_2}$.

Pela definição de elipse, o número L que havíamos escolhido no início da aula satisfaz $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = L$ para todo ponto P nesta curva. Podemos mostrar facilmente que $L = 2a$; vejamos: como A_1 e A_2 são pontos da elipse, vale que

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = L,$$
$$\overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = L.$$

[1] A demonstração da equivalência entre as definições da aula anterior e desta está fora do escopo destas notas, mas pode ser encontrada na referência [1].

Somando membro a membro as duas igualdades acima, temos que

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} + \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = 2L.$$

Mas, pela Figura 1, veja que

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} + \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} =$$
$$= \left(\overline{A_1F_1} + \overline{A_2F_1}\right) + \left(\overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2}\right) = 2 \cdot \overline{A_1A_2}.$$

Sendo assim,

$$2 \cdot \overline{A_1A_2} = 2L \implies \overline{A_1A_2} = L \implies 2a = L.$$

Com o mesmo tipo de raciocínio, podemos concluir também que $\overline{A_1C} = \overline{A_2C}$. Logo, $\overline{A_1C} = \overline{A_2C} = a$.

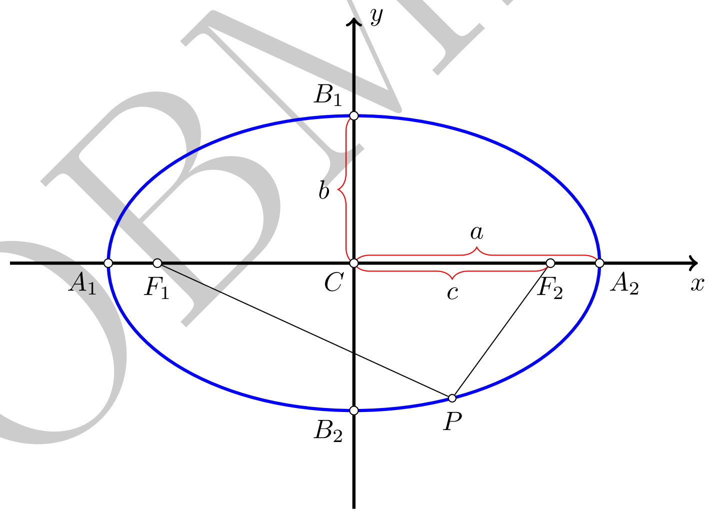

Figura 1: elementos notáveis de uma elipse.

Agora, usaremos o fato de que o ponto B_1 pertence à elipse para obter uma importante conclusão. Por um lado, temos que $\overline{B_1F_1} + \overline{B_1F_2} = 2a$; por outro, a simetria da elipse em relação à reta $\overline{A_1A_2}$ fornece $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2}$. Logo, $\overline{B_1F_1} = a$. Agora, observe que B_1CF_1 é um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede a e cujos catetos medem b e c (veja a Figura 2). Portanto, pelo Teorema de Pitágoras temos a seguinte relação notável na elipse:

> Os parâmetros a, b e c definidos acima satisfazem a relação a seguir:
> $$a^2 = b^2 + c^2. \quad (1)$$

2 A equação de uma elipse

Vamos, agora, deduzir a forma geral da equação de uma elipse no plano xOy que possui seus eixos paralelos aos

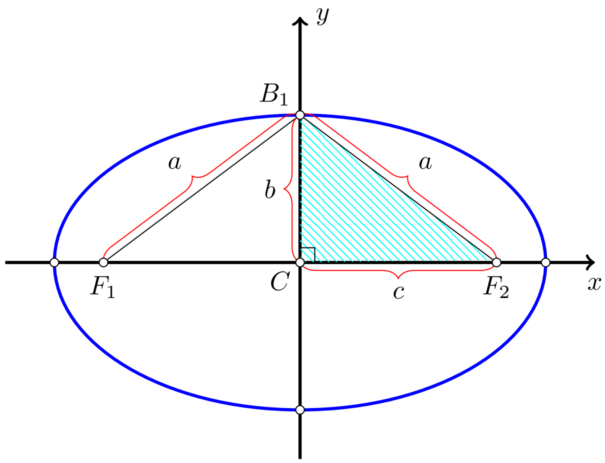

Figura 2: visualizando a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

eixos x e y. Conforme veremos, tal equação será dada em função da posição do centro da elipse e dos parâmetros a e b. Vamos começar com o caso mais simples em que o centro C da elipse é o ponto $(0,0)$ e os focos, F_1 e F_2, estão sobre o eixo-x.

Como $\overline{F_1F_2} = 2c$ e $(0,0)$ é o ponto médio de F_1F_2 segue que $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Seja $P = (x,y)$ um ponto qualquer da elipse. Lembrando da fórmula da distância entre dois pontos, a relação $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ pode ser traduzida para:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a,$$

ou simplesmente

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Tendo como objetivo eliminar os radicais acima, vamos mover um deles para o outro lado da equação e, em seguida, elevar ambos os lados ao quadrado. Simplificando a expressão, passo a passo temos as seguintes expressões equivalentes:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\\
(x+c)^2 + \cancel{y^2} &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + ((x-c)^2 + \cancel{y^2})\\
(x+c)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2\\
\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}\\
2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx\\
4a^2 - 4cx &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\\
a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados da última igualdade, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
(a^2 - cx)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2)\\
a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)\\
a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2 &= a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2\\
a^4 + c^2x^2 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.
\end{aligned}$$

Isolando as variáveis x e y, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Usando o fato de que $a^2 = b^2 + c^2$, simplificamos a última expressão acima para

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Por fim, dividindo ambos os lados por a^2b^2 obtemos a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Note que, na equação acima, estamos supondo implicitamente que $a \geq b$, uma vez que a equação (1) só é válida quando a é o comprimento do eixo maior e b o comprimento do eixo menor da elipse. Lembre-se de que, para obter a equação acima, começamos assumindo que os focos estão sobre o eixo-x, ou seja, que o eixo maior está sobre o eixo-x.

Assim, no caso em que os focos da elipse estejam sobre o eixo-y (ver Figura 3), digamos com $F_1 = (0,-c)$ e $F_2 = (0,c)$, fazendo cálculos análogos aos apresentados chegaríamos à equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{3}$$

Observação 1. *No caso em que $a = b$, a equação acima pode ser simplificada para $x^2 + y^2 = a^2$. As soluções desta equação representam um conjunto de pontos (x,y) cuja distância para o ponto $(0,0)$ é igual a a, ou seja, ela é a equação de um círculo de centro $C(0,0)$ e raio a. Note que tal situação corresponde a que $c = 0$ e F_1 e F_2 coincidam com C.*

Exemplo 2. *Os pontos $(4,0)$ e $(-4,0)$ são vértices de uma elipse cujos focos são $(3,0)$ e $(-3,0)$. Encontre a equação da mesma.*

Solução. Como os focos estão sobre o eixo-x, temos uma equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ademais, os pontos $(4,0)$ e $(-4,0)$ serão as extremidades do eixo maior, de forma que o comprimento de tal eixo é $4-(-4) = 8$. Logo, $2a = 8 \implies a = 4$. A distância entres

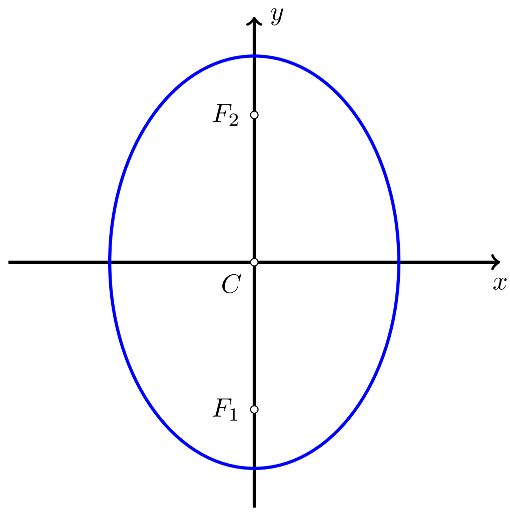

Figura 3: elipse com focos sobre o eixo-y.

os focos é $2c = 3 - (-3) = 6$, e assim $c = 3$. Por fim, como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 7.$$

Então, a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

□

Exemplo 3. *Obtenha a equação de uma elipse, sabendo que dois de seus vértices são os pontos* $(0, 6)$ *e* $(0, -6)$ *e que seus focos são os pontos* $(0, 4)$ *e* $(0, -4)$.

Demonstração. Desta vez os focos encontram-se sobre o eixo-y, de maneira que a equação procurada é da forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

com $a \geq b$. Como os pontos $(0, 6)$ e $(0, -6)$ estão sobre a reta focal, eles são vértices do eixo maior, que terá comprimento $6 - (-6) = 12$. Assim, $2a = 12$ e, portanto, $a = 6$. Como no exemplo anterior, temos $c = 4$ e

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20.$$

Logo, a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

□

Suponha, agora, que queremos uma elipse com centro no ponto $C = (x_0, y_0)$. Esta elipse pode ser obtida fazendo-se uma translação de uma elipse que possui centro no ponto $(0, 0)$. Algebricamente, isso corresponde a uma *substituição de variáveis*, onde trocamos x por $x - x_0$ e y por $y - y_0$ na equações (2) e (3) (essa mudança faz com que o ponto (x_0, y_0) seja levado no ponto $(0, 0)$).

Desse modo, uma elipse que possui centro no ponto (x_0, y_0) e cujo eixo maior é paralelo ao eixo-x terá equação da forma

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

De maneira análoga, uma elipse que tenha o eixo maior paralelo ao eixo-y terá equação

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

2.1 Excentricidade

A **excentricidade** de uma elipse é definida como a razão $e = c/a$, onde $2c$ é a distância focal e $2a$ é o comprimento do eixo maior. Observando a Figura 2 vemos que $c \leq a$, o que acarreta $0 \leq c/a \leq 1$. Por outro lado, substituindo $c = ea$ na igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos $a^2 = b^2 + e^2a^2$ ou, o que é o mesmo,

$$(1 - e^2)a^2 = b^2. \tag{4}$$

Assim, para um valor fixo de a, quanto mais próximo a excentricidade estiver de 1, mais próximo b estará de 0. Por sua vez, isso fará com que a elipse seja cada vez mais *achatada* (a forma da elipse se aproximará do segmento de reta F_1F_2). No extremo oposto (mas ainda para um valor fixo de a), (4) garante que quanto mais próximo e estiver 0, mais próximo b estará de a; então, a elipse se aproximará de um círculo.

A Figura 4 mostra várias elipses, com diferentes excentricidades.

3 Exercícios

O exemplo a seguir exercita os conceitos introduzidos na seção anterior.

Exemplo 4. *Em cada um dos itens a seguir, verifique se a equação dada representa uma elipse. Em caso afirmativo, descreva seus principais elementos:*

(a) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$.

(b) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

(c) $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$.

(d) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0$.

Solução.
(a) Se a equação dada corresponder a uma elipse, temos de ser capazes de rearranjar seus termos para que ela fique no

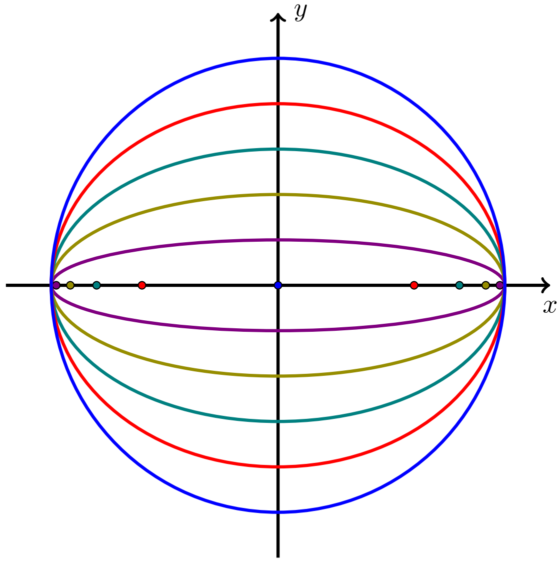

Figura 4: elipses com diferentes excentricidades.

formato de (2) ou (3). Como $25x^2 + 9y^2 = 225$, dividindo ambos os lados por 225 obtemos:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Temos então uma elipse com eixo maior sobre o eixo-y, e onde $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$; logo, $a = 5$ e $b = 3$. Usando a relação (1), segue que

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16,$$

e daí $c = 4$. O comprimento do eixo maior é $\overline{A_1A_2} = 10$, o do eixo menor é $\overline{B_1B_2} = 2b = 6$ e a distância focal é $\overline{F_1F_2} = 2c = 8$. Por fim, sua excentricidade é $e = c/a = 4/5 = 0{,}8$.

(b) Neste item, para tentar deixar a equação no formato adequado à equação de uma elipse, vamos precisar separar as variáveis x e y e, em seguida, utilizar a técnicas de completar quadrados (que estudamos no módulo sobre equações de segundo grau, do nono ano do Ensino Fundamental). Inicialmente, escrevemos:

$$(4x^2 - 40x) + (9y^2 + 36y) = -100.$$

Em seguida, completamos quadrados no termos $4x^2 - 40x$, quer dizer, o reescrevemos como:

$$4x^2 - 40x = 4x^2 - 40x + 10^2 - 10^2 = (2x - 10)^2 - 10^2.$$

Fazendo o mesmo em relação à soma $9y^2 + 36y$, temos:

$$9y^2 + 36y = 9y^2 + 36y + 6^2 - 6^2 = (3x + 6)^2 - 6^2.$$

Assim, a equação original equivale a:

$$(2x - 10)^2 - 10^2 + (3x + 6)^2 - 6^2 = -100$$

ou, o que é o mesmo,

$$2^2(x - 5)^2 + 3^2(x + 2)^2 = 6^2.$$

Por fim, dividindo ambos os lados dessa última igualdade por 6^2, temos:

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(x+2)^2}{4} = 1.$$

Vemos, então, que a equação dada realmente representa uma elipse. Ela possui centro no ponto $C = (x_0, y_0)$, onde $-x_0 = -5$ e $-y_0 = 2$. Logo, $C = (5, -2)$; também, possui eixo maior paralelo ao eixo-x. Temos ainda que $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$; logo, $a = 3$ e $b = 2$. Assim, $c^2 = 9 - 4 = 5$, de sorte que $c = \sqrt{5}$. Por fim, sua excentricidade é $e = \sqrt{5}/3$, sua distância focal é $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$ e seus eixos são $\overline{A_1A_2} = 2a = 6$ e $\overline{B_1B_2} = 2b = 4$.

(c) Argumentando como no item anterior, isto é, separando os termos em x e y e completando quadrados, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}(36x^2 - 108x) + (9y^2 + 6y) &= -82\\ (36x^2 - 108x + 9^2) + (9y^2 + 6y + 1^2) &= -82 + 9^2 + 1^2\\ (6x - 9)^2 + (3y + 1)^2 &= -82 + 81 + 1^2\\ (6x - 9)^2 + (3y + 1)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dessa vez, obtivemos a soma de dois quadrados perfeitos igual a zero. A única maneira disso acontecer é se ambos esses quadrados forem eles mesmos iguais a zero, ou seja, se $6x - 9 = 0$ e $3y + 1 = 0$. Por sua vez, isso implica $x = 3/2$ e $y = -1/3$.

A interpretação deste resultado é que $(3/2, -1/3)$ é o único ponto que satisfaz a equação original. Dessa forma, o conjunto de pontos que satisfazem a equação não é uma elipse, mas sim um conjunto unitário.

(d) Neste último item, começamos procedendo como nos dois anteriores:

$$\begin{aligned}&9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y = -25 \iff\\ \iff &(9x^2 + 18x) + (4y^2 - 9y) = -25\\ \iff &(9x^2 + 18x + 3^2) + (4y^2 - 9y + (9/4)^2) =\\ &= -25 + 3^2 + (9/4)^2\\ \iff &(3x + 3)^2 + (2y - (9/4))^2 = -16 + (9/4)^2.\end{aligned}$$

Desta vez, contudo, veja que o número $-16 + (9/4)^2$ é negativo (você pode calcular quanto vale este número exatamente, mas isso não é necessário, uma vez que $(9/4)^2$ é claramente menor do que 3^2 que é menor do que 16). Então, temos a soma de dois quadrados resultando em um número negativo, o que é impossível (pois todo quadrado é um número não negativo). Isso quer dizer que a equação original não possui soluções (ou seja, seu conjunto-solução é vazio); em particular, ela não representa uma elipse. □

Dicas para o Professor

Este material pode ser apresentado em dois encontros de 50 minutos. Apesar de não ser necessário provar que toda elipse, conforme definida neste material, é uma seção cônica, é importante que o professor frise esse ponto, a fim de articular adequadamente a aula anterior com a presente. De qualquer forma, havendo tempo, a apresentação da demonstração constante da referência [1] pode ser objeto de um terceiro encontro. Do ponto de vista operacional, recomendamos que o professor discuta o Exemplo 4 cuidadosamente, uma vez que ele serve de modelo à análise de outras situações semelhantes, para hipérboles e parábolas. A referência [2] contém mais exercícios similares, bem como discutem outros aspectos da teoria de elipses.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria.* Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 7: Geometria analítica.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.