Material Teórico - Módulo Áreas de Figuras Planas

Áreas de Figuras Planas: Resultados Básicos - Parte 2

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

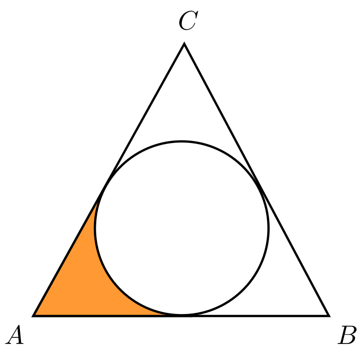
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de outubro de 2018

1 Exemplos

Nesta segunda parte, discutimos vários exercícios envolvendo cálculos de áreas de figuras planas. Apoiamo-nos nas relações deduzidas na primeira parte.

Exemplo 1. *Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero cujo lado mede $\ell = 6$ cm. Calcule a área da região colorida de laranja.*

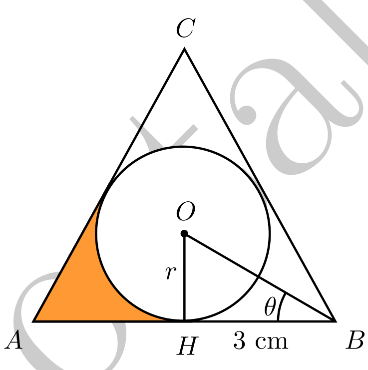


Solução. Primeiramente, note que, por simetria, a área da região laranja é igual a um terço da diferença entre as áreas do triângulo ABC e do círculo inscrito.

A área do triângulo equilátero ABC já podemos calcular, sendo dada por

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

Resta calcular a área do círculo. Para tanto, denotemos por O o centro e r o raio do círculo, por H o pé da altura relativa ao lado AB e por θ a medida do ângulo $\angle OBH$ (veja a figura abaixo).



Uma vez que, em todo triângulo isósceles, a altura relativa à base também é mediana e bissetriz, temos

$$\overline{HB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{6}{2} = 3\ \text{cm}$$

e

$$\theta = \frac{A\widehat{B}C}{2} = \frac{60^{\text{o}}}{2} = 30^{\text{o}}.$$

Como $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, segue que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{3} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{3} \Longrightarrow r = \sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Então, a área do círculo é dada por

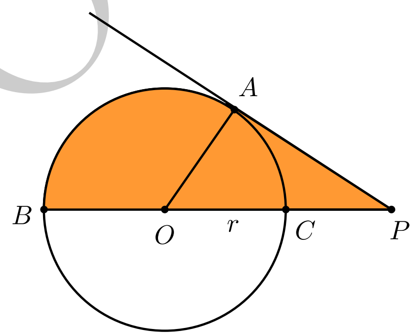
$$\pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\pi\ \text{cm}^2.$$

Por fim, a discussão acima nos permite concluir que a área da região pintada de laranja é igual, em cm^2, a

$$\frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{3} = 3\sqrt{3} - \pi.$$

□

Exemplo 2. *Na figura abaixo, O é o centro do círculo, que tem raio $r = \sqrt{6}$ cm e é tangente à reta $\overleftrightarrow{AP}$. Além disso, sabe-se que $\overline{CP} = \overline{OC} = r$. Encontre, com justificativa, a área da região colorida de laranja.*



Solução. Note que a área da região laranja é a soma das áreas S_1 e S_2, sendo S_1 a área do setor circular determinado pelo ângulo $\angle BOA$ e S_2 a área do triângulo OAP.

Para calcular tais áreas, precisamos encontrar a medida θ do ângulo $\angle AOC$. Para tanto, observe que, graças à tangência entre o círculo e a reta $\overleftrightarrow{AP}$, o triângulo OAP é retângulo em A. Então,

$$\cos\theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

e, como θ é agudo, temos $\theta = 60^{\text{o}}$.

Daí, segue que

$$B\widehat{O}A = 180^\circ - \theta = 180^{\text{o}} - 60^{\text{o}} = 120^{\text{o}}$$

e, assim sendo,

$$S_1 = \frac{120}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{6})^2 = 2\pi.$$

Por outro lado, como

$$\overline{AP} = \overline{OP}\,\text{sen}\,\theta = 2\sqrt{6}\,\text{sen}\,60^{\circ} = 3\sqrt{2},$$

temos

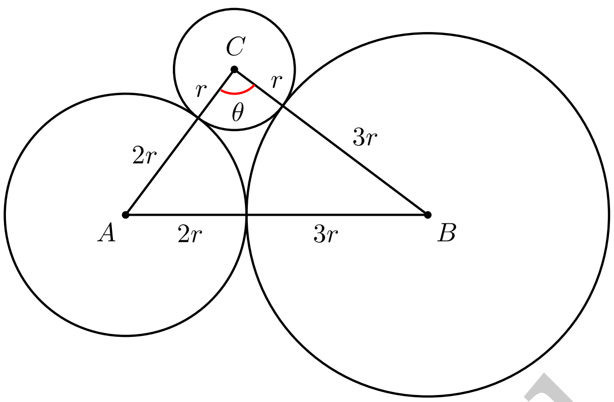
$$S_2 = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{AP}}{2} = \frac{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Por fim, a área laranja é dada, em cm^2, por

$$S_1 + S_2 = 2\pi + 3\sqrt{3}.$$

□

Exemplo 3. *Os círculos desenhados na figura abaixo são tangentes dois a dois e os seus raios medem r, $2r$ e $3r$. Calcule a área do trângulo ABC em função de r.*



Solução 1. Como os lados de ABC são proporcionais a 3, 4, 5 e um triângulo de lados 3, 4, 5 é retângulo, o mesmo sucede com ABC. Assim, $A\widehat{C}B = 90°$, de sorte que

$$A(ABC) = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2} = \frac{3r\cdot 4r}{2} = 6r^2.$$

□

Solução 2. Apliquemos a Fórmula de Herão (veja a segunda parte do material da aula “Lei dos Senos e Lei dos Cossenos”, no Módulo “Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos, Polígonos Regulares”, também do nono ano).

Nas notações de lá, fazendo $a = 3r$, $b = 4r$, $c = 5r$, temos

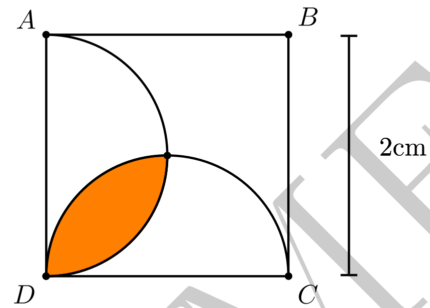
$$p = \frac{a+b+c}{2} = 6r.$$

Portanto,

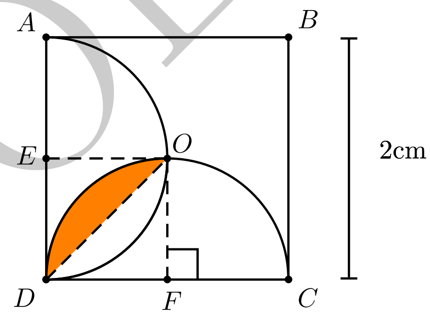
$$\begin{aligned} A(ABC) &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{6r(6r-3r)(6r-4r)(6r-5r)} \\ &= \sqrt{6^2r^4} = 6r^2. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado cujos lados medem 2 cm, e os arcos traçados são semicírculos de diâmetros AD e CD. Calcule a área da região laranja, definida pela interseção dos semicírculos.*



Solução. Sejam E e F, respectivamente, os pontos médios dos lados AD e CD, e O o outro ponto de interseção (que não D) dos dois semicírculos (veja a figura abaixo).



Por simetria, a área da região definida pela interseção dos dois semicírculos, que denotaremos por S, é igual ao dobro da área da região pintada em laranja na última figura acima. Por sua vez, essa área é igual à diferença entre as áreas do setor circular determinado pelo ângulo $\angle DFO$ e do triângulo (retângulo) DFO.

Como $\overline{DF} = 1$, a área do setor definido por $\angle DFO$ mede

$$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Também, a área do triângulo DFO mede

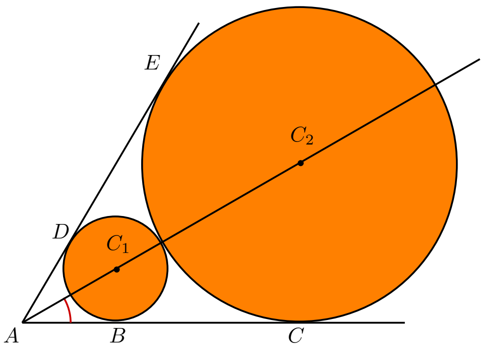
$$\frac{\overline{DF}\cdot\overline{FO}}{2} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Então (em cm^2),

$$S = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

□

Exemplo 5. *Na figura a seguir, o círculo menor tem centro C_1, área S_1 e raio r, ao passo que o círculo maior tem centro C_2, área S_2 e raio R. Além disso, $E\widehat{A}C = 60^o$. Encontre a razão $\frac{S_1}{S_2}$.*



Solução. Primeiramente, observe que

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\cancel{\pi} r^2}{\cancel{\pi} R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

de sorte que basta calcularmos a razão $\frac{r}{R}$.

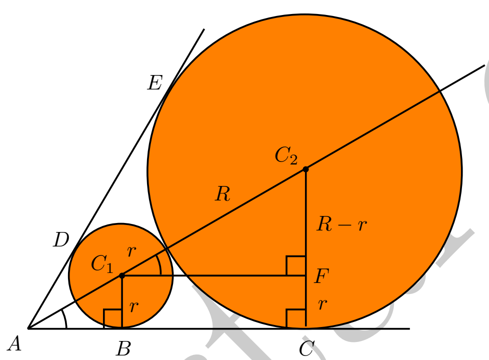
Agora, note que a reta que une os centros C_1 e C_2 passa pelo vértice A do ângulo $\angle CAE$ e é a bissetriz de tal ângulo. Em símbolos,

$$C_2\widehat{C_1}F = C_1\widehat{A}B = 30^{\circ}.$$

Por outro lado, sendo (veja a figura abaixo) F o ponto de interseção da paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ por C_1 com o segmento CC_2 (que é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$), temos

$$C_2\widehat{C}_1F = C_2\widehat{A}C = 30^\circ$$

e $C_1\widehat{F}C_2 = 90^\circ$.



Assim, como $\overline{C_1C_2} = R + r$ e $\overline{C_2F} = \overline{C_2C} - \overline{CF} = R - r$, aplicando Trigonometria no triângulo retângulo C_1C_2F, obtemos

$$\frac{1}{2} = \operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{\overline{C_2F}}{\overline{C_1C_2}} = \frac{R - r}{R + r}.$$

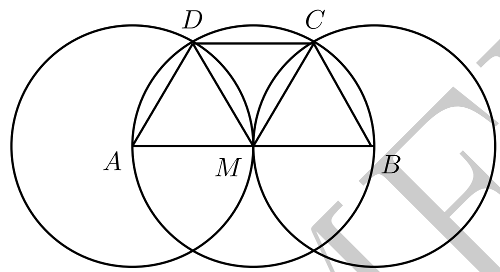
Multiplicando em $\times$ e operando um pouco de álgebra elementar, obtemos $R + r = 2(R - r)$ ou, ainda, $R + r = 2R - 2r$. Então, $R = 3r$ ou, o que é o mesmo, $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.

Portanto,

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

□

Exemplo 6. *Na figura abaixo, temos três círculos de raios iguais a 2 cm e centros colineares A, B, M. Mostre que $ABCD$ é um trapézio e calcule sua área.*



Solução. Veja que $\overline{AD} = \overline{DM} = \overline{AM} = 2$ cm e $\overline{MB} = \overline{BC} = \overline{MB} = 2$cm. Daí concluímos que os triângulos AMD e MBC são ambos equiláteros.

Então, por um lado, as distâncias dos pontos C e D ao lado AB do quadrilátero $ABCD$, sendo iguais às alturas de triângulos equiláteros congruentes, são elas mesmas congruentes, o que garante que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Logo, $ABCD$ é trapézio.

Por outro lado, temos $A\widehat{M}D = B\widehat{M}C = 60^{\circ}$ e, assim,

$$A\widehat{M}D + D\widehat{M}C + C\widehat{M}B = 180^{\circ} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 60^{\circ} + D\widehat{M}C + 60^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$\Longrightarrow D\widehat{M}C = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}.$$

Além disso, como $\overline{DM} = \overline{MC}$, concluímos que o triângulo DMC também é equilátero, de sorte que $\overline{CD}$ também é igual a 2 cm.

Por fim, veja que a altura h do trapézio é igual à altura do triângulo equilátero ADM, que, como sabemos, mede

$$h = \frac{\overline{DM}\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Desse modo, a área do trapézio $ABCD$ é

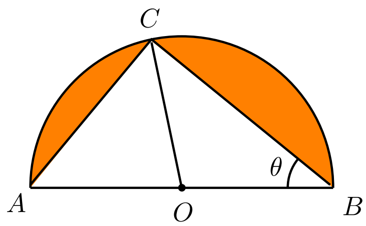
$$\left(\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\right)h = \left(\frac{4+2}{2}\right)\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

□

Exemplo 7. *O raio do semicírculo de centro O desenhado na figura a seguir mede 1 cm. Qual deve ser a medida do ângulo θ para que a região colorida de laranja tenha área mínima? Justifique sua resposta.*

Solução. Veja que $O\widehat{C}B = \theta$, pois o triângulo OBC é isósceles de base BC. Além disso, segue do Teorema do Ângulo Externo que

$$A\widehat{O}C = O\widehat{B}C + O\widehat{C}B = \theta + \theta = 2\theta.$$



Agora, a área S da região pintada de laranja da figura é igual a $S_1 + S_2$, onde S_1 é a diferenca entre a área do setor circular definido pelo ângulo central $\angle AOC$ e a área do triângulo AOC, enquanto S_2 é a diferença entre a área do setor definido pelo ângulo central $\angle BOC$ e a área do triângulo BOC.

Como $A\widehat{O}C = 2\theta$ e $BOC = 180^{\circ} - 2\theta$, a fórmula para a área de um setor circular em termos do ângulo central, juntamente com a fórmula do seno para a área de um triângulo, dão

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2\theta}{360}\pi \cdot 1^2 - \frac{1 \cdot 1}{2}\operatorname{sen}(2\theta) \\ &= \frac{\pi\theta}{180} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{180 - 2\theta}{360} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1 \cdot 1}{2}\operatorname{sen}(180^{\circ} - 2\theta) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\theta}{180} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \cancel{\frac{\pi\theta}{180}} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{\pi\theta}{180}} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(2\theta). \end{aligned}$$

Portanto, S é mínima quando $\operatorname{sen}(2\theta)$ é máximo, isto é, quando $\operatorname{sen}(2\theta) = 1$. Por sua vez, tal ocorre se, e somente se, $2\theta = 90^{\circ}$, ou seja, $\theta = 45^{\circ}$. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor todos os exemplos que compõem este material. Sugerimos ao professor que explique com bastante cuidado cada um dos exemplos, ressaltando, em cada caso, as estratégias de decomposição da região em questão em partes cujas áreas sabemos calcular. Observe que, em última análise, tais estratégias baseiam-se nas fórmulas que serão utilizadas.

As referências a seguir abordam o material aqui reunido em maior profundidade e trazem vários outros exemplos resolvidos e problemas propostos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Editora Atual, 2013.