

**Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de  
Prismas e Pirâmides**

**Volumes de Sólidos Semelhantes**

**Terceiro Ano - Médio**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto  
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**8 de setembro de 2018**



**PORTAL DA  
MATEMÁTICA**  
OBMEP

# 1 Sólidos semelhantes

Fixado um ponto  $O$  do espaço e um número real  $k > 0$ , uma **homotetia** de centro  $O$  e razão  $k$  é uma transformação que leva um ponto  $P$  em um ponto  $P'$  de modo que

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

O número real  $k$  é chamado *razão da homotetia*. Os pontos  $P$  e  $P'$  são chamados **homólogos**.

Dois figuras (isto é, dois conjuntos de pontos)  $F_1$  e  $F_2$  no espaço são chamadas **semelhantes** se existe uma homotetia de razão  $k$  que leva a figura  $F_1$  em uma figura  $F_1'$ , congruente a  $F_2$  (ou seja,  $F_2$  pode ser obtida a partir de  $F_1'$  por um *movimento rígido* no espaço). Neste caso, a constante  $k$  é chamada **razão de semelhança** entre as figuras.

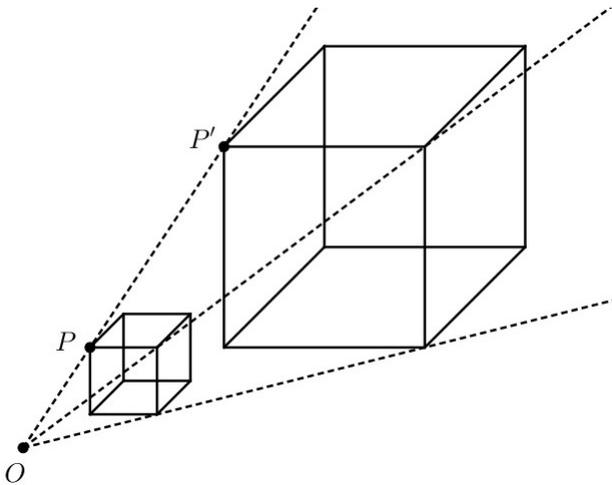


Figura 1: homotetia entre duas figuras no espaço.

**Exemplo 1.** Duas esferas, de raios  $r$  e  $R$ , são semelhantes, com razão de semelhança  $R/r$ .

**Solução.** De fato, chamemos de  $E_r(O)$  e  $E_R(O')$  as esferas de raio  $r$  e  $R$ , centradas em  $O$  e  $O'$ , respectivamente. Consideremos uma esfera  $E_R(O)$ , de mesmo raio que  $E_R(O')$  (é, portanto, congruente a  $E_R(O')$ ), mas concêntrica com  $E_r(O)$ , ou seja,  $E_r(O)$  e  $E_R(O)$  têm o mesmo centro  $O$  (veja a Figura 2). A esfera  $E_R(O)$  pode ser obtida a partir da esfera  $E_R(O')$  fazendo-se uma *translação* de  $E_R(O')$  pelo vetor  $\overrightarrow{O'O}$ .

Vista como sólido, uma esfera de centro  $O$  raio  $a$  pode ser descrita como o conjunto dos pontos do espaço cuja distância até  $O$  não supera  $a$ , ou seja,

$$E_a(O) = \{P \mid \overline{PO} \leq a\}.$$

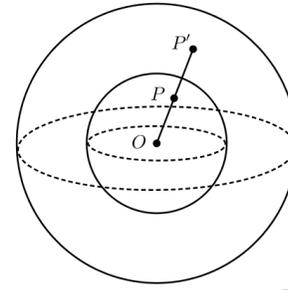


Figura 2: homotetia entre duas esferas concêntricas.

Se  $P \in E_r(O)$ , então  $\overline{PO} \leq r$ . Defina  $P'$  como o único ponto na semirreta  $OP$  tal que  $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$ , onde  $k = \frac{R}{r}$ . Da desigualdade  $\overline{OP} \leq r$  segue que

$$\overline{OP'} = \frac{R}{r} \cdot \overline{OP} \leq \frac{R}{r} \cdot r = R,$$

e isso implica que  $P'$  pertence à esfera  $E_R(O)$ .

O argumento do parágrafo anterior mostra que existe uma homotetia entre  $E_r(O)$  e  $E_R(O)$ . Como  $E_R(O)$  é congruente a  $E_R(O')$ , concluímos que  $E_r(O)$  e  $E_R(O')$  são semelhantes.

A *superfície esférica* de centro  $O$  e raio  $a$  é o conjunto

$$S_a(O) = \{P \mid \overline{PO} = a\}.$$

As duas superfícies esféricas  $S_r(O)$  e  $S_R(O')$  também são semelhantes. Para constatar isso, basta repetir o argumento acima com igualdades, em vez de desigualdades.  $\square$

**Exemplo 2.** Dois cubos de arestas  $a < b$  são semelhantes, com razão de semelhança  $k = b/a$ .

**Solução.** É possível construir homotetias entre os cubos diretamente, como na Figura 1. Outra maneira (veja a Figura 3) é considerar, sobre uma aresta  $AB$  do cubo maior, um ponto  $C$  tal que  $\overline{AC} = a$ . O cubo com aresta  $AC$  é congruente ao cubo menor, de aresta  $a$ .

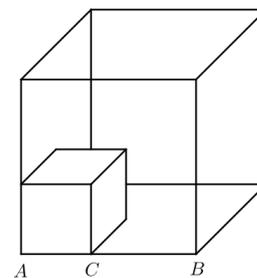


Figura 3: homotetia entre dois cubos.

A homotetia entre o cubo de aresta  $AC$  e o cubo de aresta  $AB$  pode ser definida do seguinte modo: para cada ponto  $P$  do cubo de aresta  $AC$ , considere a semirreta  $\overrightarrow{AP}$ . Nessa semirreta, marque o ponto  $P'$  tal que  $\overline{AP'} = k \cdot \overline{AP}$ , com  $k = \frac{b}{a}$ . Esse ponto  $P'$  é a imagem de  $P$  pela homotetia. Por outro lado, o ponto  $P'$  é levado no ponto  $P$  pela homotetia de centro  $A$  e razão  $k^{-1} = a/b$ . Essas duas homotetias são inversas uma da outra e isso mostra, em particular, que cada uma delas é bijetiva, isto é, a cada ponto  $P$  corresponde um único ponto  $P'$  e a cada ponto  $P'$  corresponde um ponto  $P$ .  $\square$

## 2 Volumes de sólidos semelhantes

Nesta seção, discutiremos o seguinte resultado fundamental:

**Teorema 3.** *Se  $F$  e  $F'$  são dois sólidos semelhantes, com razão de semelhança  $k$ , e se os volumes de  $F$  e  $F'$  são  $v(F)$  e  $v(F')$ , respectivamente, então a razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança. Em símbolos, se  $A, B \in F$ ,  $A', B' \in F'$  e  $k = \overline{A'B'}/\overline{AB}$ , então*

$$\frac{v(F')}{v(F)} = k^3. \quad (1)$$

**Prova.** Se  $F$  e  $F'$  são cubos, com arestas  $a$  e  $a'$ , então  $v(F) = a^3$  e  $v(F') = (a')^3$ . A razão de semelhança entre os dois cubos é  $k = a'/a$ . Logo, neste caso,

$$\frac{v(F')}{v(F)} = \frac{(a')^3}{a^3} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 = k^3.$$

Para outros sólidos a verificação de (1) não é tão simples. A seguir, daremos uma *ideia* de como justificar esse resultado para sólidos mais gerais.

Seja  $\delta > 0$  um número real positivo. Imaginemos que o espaço tridimensional foi dividido em cubos justapostos, todos com aresta  $\delta$ , que formam um *reticulado* ou *malha*. Seleccionemos, dentre os cubos dessa malha, aqueles que têm pelo menos um ponto em comum com o sólido  $F$ . Alguns desses cubos eventualmente podem estar totalmente contidos em  $F$ , e outros podem ter apenas uma parte em comum com o sólido. A quantidade de cubos que encontram o sólido  $F$  em pelo menos um ponto é *finita*. Podemos, então, enumerar esses cubos:  $C_1, \dots, C_n$ . Cada um deles tem volume igual a  $\delta^3$  e o volume da união desses cubos é  $n \cdot \delta^3$ . Podemos, ainda, considerar apenas os cubos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  que estão *totalmente contidos* no sólido  $F$ . A união desses cubos tem volume  $m \cdot \delta^3$ .

Essas quantidades  $n$  e  $m$  de cubos que têm contato com  $F$  ou que estão totalmente contidos em  $F$  dependem de  $\delta$ . De fato, quanto menor for  $\delta$ , tanto maiores serão  $n$  e  $m$ . De acordo com as escolhas que fizemos para esses cubos, fica claro que

$$m \cdot \delta^3 < v(F) < n \cdot \delta^3. \quad (2)$$

Vamos admitir também que a *fronteira*, ou seja, a “casca” do sólido  $F$  é *desprezível do ponto de vista do cálculo de volumes*. De um modo mais preciso, para cada  $\delta > 0$ , os  $n - m$  cubos da malha que têm pontos em comum com  $F$ , mas que não estão totalmente contidos em  $F$ , são exatamente aqueles que cobrem a fronteira de  $F$ . Dizermos que essa fronteira tem **medida nula** se a soma dos volumes dos cubos que cobrem a fronteira puder ficar *tão pequena quanto se queira*. Quantificamos isso da seguinte forma: dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $(n - m) \cdot \delta^3 < \varepsilon$ .

Agora, a semelhança que transforma  $F$  em  $F'$  também transforma a malha de cubos com aresta  $\delta$  em um malha de cubos com aresta  $k \cdot \delta$ . Vamos admitir os seguintes fatos:

- (1) Se um cubo  $C$  da malha tem pelo menos um ponto em comum com a figura  $F$ , então a imagem  $C'$  de  $C$  pela semelhança tem pelo menos um ponto em comum com  $F'$ . Mais precisamente, se  $P \in C \cap F$ , então  $P' \in C' \cap F'$ , onde  $P'$  é a imagem de  $P$  pela semelhança.
- (2) Se um cubo  $\Gamma$  está totalmente contido em  $F$ , então sua imagem  $\Gamma'$  pela semelhança é um cubo que está totalmente contido em  $F'$ .

As observações acima implicam que

$$m \cdot (k\delta)^3 < v(F') < n \cdot (k\delta)^3. \quad (3)$$

Por outro lado, segue de (3) que o volume da fronteira de  $F'$  é menor que  $k^3(n - m)\delta^3$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhendo  $\delta > 0$  tal que  $(n - m) \cdot \delta^3 < \frac{\varepsilon}{k^3}$ , vemos que

$$k^3(n - m)\delta^3 < \varepsilon. \quad (4)$$

Isso significa que a fronteira de  $F'$  também tem medida nula.

Multiplicando as desigualdades (2) por  $k^3$ , vemos que

$$k^3(m\delta^3) < k^3 \cdot v(F) < k^3 \cdot (n\delta^3). \quad (5)$$

Finalmente, vamos comparar (3) e (5) para concluirmos que  $v(F') = k^3 \cdot v(F)$ .

Notemos que  $v(F')$  e  $k^3 \cdot v(F)$  estão ambos em um mesmo intervalo aberto com extremos  $mk^3\delta^3$  e  $nk^3\delta^3$ . Podemos escolher  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de modo que o comprimento desse intervalo,  $nk^3\delta^3 - mk^3\delta^3 = k^3(n - m)\delta^3$  seja tão pequeno quanto queiramos. Se fosse  $v(F') \neq k^3 \cdot v(F)$ , a distância  $|v(F') - k^3 \cdot v(F)|$  seria positiva; logo, poderíamos escolher  $\varepsilon = |v(F') - k^3 \cdot v(F)|$ . Mas, como  $v(F')$  e  $k^3 \cdot v(F)$  pertencem a um intervalo de comprimento  $k^3(n - m)\delta^3$ , teríamos

$$\varepsilon = |v(F') - k^3 \cdot v(F)| < k^3(n - m)\delta^3 < \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Essa contradição surge por considerarmos  $v(F')$  e  $k^3 \cdot v(F)$  diferentes. Logo, eles são forçosamente iguais.  $\square$

**Observação 4.** Um argumento análogo ao apresentado acima pode ser usado para mostrar que a razão entre as áreas  $a(F)$  e  $a(F')$  de duas figuras planas semelhantes  $F$  e  $F'$  é igual ao quadrado da razão de semelhança, ou seja,

$$\frac{a(F')}{a(F)} = k^2. \quad (6)$$

Em particular, se dois poliedros são semelhantes, na razão  $k$ , então é imediato que duas faces homólogas dos mesmos também são semelhantes, na mesma razão  $k$ . Assim, a razão entre as áreas dessas faces homólogas é igual a  $k^2$ .

### 3 Volume do tronco de pirâmide

Seja  $\alpha$  um plano paralelo ao plano da base de uma pirâmide  $P$ . A parte da pirâmide  $P$  que está situada entre o plano da base e o plano  $\alpha$  é chamada **tronco de pirâmide** (veja a Figura 4). A distância entre  $\alpha$  e o plano da base é a **altura** do tronco; por outro lado, a base da pirâmide, juntamente com o polígono de interseção da pirâmide com  $\alpha$ , são as **bases** do tronco de pirâmide.

Nesta seção explicaremos como calcular o volume de um tronco de pirâmide, uma vez conhecidos sua altura e as áreas de suas bases. Para tanto (veja novamente a Figura 4), consideremos um tronco de pirâmide de altura  $h$  e bases com áreas  $b$  e  $B$ . Suponhamos que este tronco foi obtido a partir de uma pirâmide de base  $B$  e altura  $h_2 = h + h_1$ .

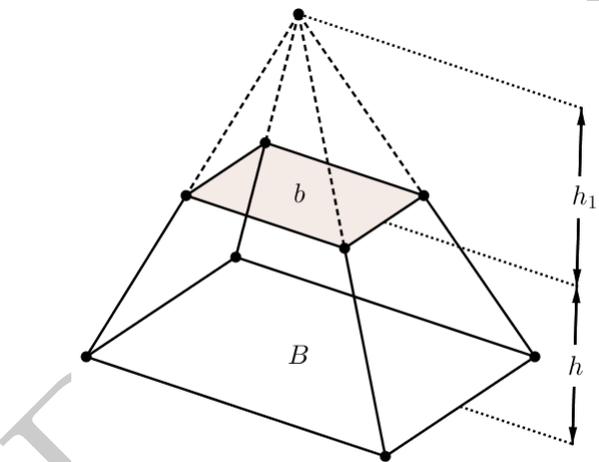


Figura 4: um tronco de pirâmide.

O volume do tronco,  $V_T$  é igual à diferença entre os volumes de duas pirâmides semelhantes:  $V_T = V_2 - V_1$ ,

onde  $V_2 = \frac{1}{3} \cdot h_2 B$  e  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot h_1 b$ . Assim,

$$\begin{aligned} V_T &= V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \cdot (h_2 B - h_1 b) \\ &= \frac{1}{3} \cdot ((h_1 + h)B - h_1 b) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (hB + (B - b)h_1). \end{aligned} \quad (7)$$

De acordo com a Observação 4, as bases do tronco são polígonos semelhantes, de razão de semelhança igual à razão de semelhança  $k = \frac{h_2}{h_1}$  entre as pirâmides. Também, a razão entre as áreas  $B$  e  $b$  das bases é igual a  $k^2$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{B}{b} &= k^2 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{h_1 + h}{h_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} &= 1 + \frac{h}{h_1} \Rightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow h_1 &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot h. \end{aligned}$$

Substituindo essa relação na última expressão em (7), obtemos

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \left( hB + (B - b) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot h \right).$$

Podemos simplificar a última expressão acima notando que  $\frac{B-b}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \sqrt{B} + \sqrt{b}$ . Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{h}{3} \cdot (B + (\sqrt{B} + \sqrt{b})\sqrt{b}) \\ &= \frac{h}{3} \cdot (B + \sqrt{Bb} + b). \end{aligned} \quad (8)$$

**Exemplo 5.** Num tronco de pirâmide triangular regular, a aresta da base maior mede  $\ell$  e a aresta da base menor mede  $m$ . A aresta lateral mede  $n$ . Calcule o volume desse tronco.

**Solução.** As bases do tronco são triângulos equiláteros com áreas  $B = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$  e  $b = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$ . Na expressão (8), já podemos calcular  $B + \sqrt{Bb} + b$ :

$$\sqrt{Bb} = \sqrt{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{m^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\ell m\sqrt{3}}{4}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} B + \sqrt{Bb} + b &= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\ell m\sqrt{3}}{4} + \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\ell^2 + \ell m + m^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Para calcularmos o volume do tronco, resta encontrar sua altura  $h$ . Para tanto, examinemos a Figura 5, que mostra o tronco de pirâmide, juntamente com a projeção ortogonal da base menor do tronco sobre a base maior.

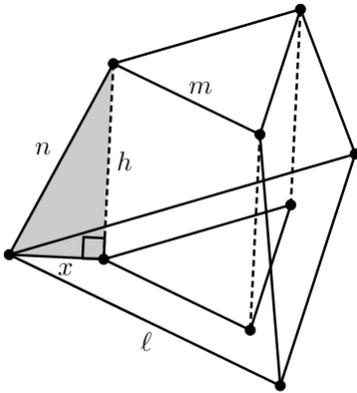


Figura 5: a altura do tronco é  $h = \sqrt{n^2 - x^2}$ .

Observe que  $h$  aparece como um dos catetos do triângulo retângulo cinza, cuja hipotenusa tem medida  $n$ . Denotando por  $x$  o outro cateto, podemos calcular  $h$  em termos de  $n$  e  $x$  com o auxílio do Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{n^2 - x^2}. \quad (10)$$

Resta, então, encontrarmos  $x$  como função dos dados  $\ell$ ,  $m$  e  $n$ . Para tanto (Figura 6), note que a projeção ortogonal da base menor sobre a base maior é um triângulo equilátero de lados de medida  $m$ , paralelos aos lados da base maior. Ademais, uma vez que a pirâmide é regular, o centro da projeção coincide com o centro da base maior.

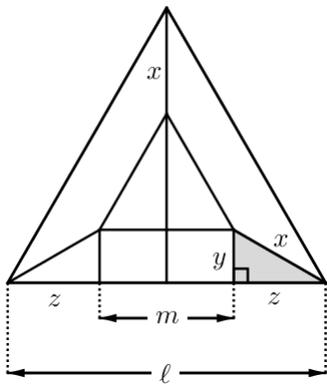


Figura 6: a projeção da base menor sobre a base maior do tronco.

Então, nas notações da Figura 6, temos que  $2z = \ell - m$ , ou seja,  $z = \frac{\ell - m}{2}$ . A diferença entre as alturas dos dois triângulos é igual a  $x + y$ , isto é,

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} - \frac{m\sqrt{3}}{2} = x + y.$$

Portanto,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - m) - x.$$

Agora, o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo em destaque na Figura 6, fornece  $x^2 = y^2 + z^2$ , logo,

$$x^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - m) - x \right)^2 + \left( \frac{\ell - m}{2} \right)^2.$$

A igualdade acima pode ser simplificada para

$$\sqrt{3}(\ell - m)x = (\ell - m)^2$$

e, finalmente,

$$x = \frac{\ell - m}{\sqrt{3}}.$$

Por fim, substituindo essa última relação em (10), chegamos a

$$h = \sqrt{n^2 - \frac{(\ell - m)^2}{3}} \quad (11)$$

Então, segue de (8), (9) e (11) que o volume do tronco de pirâmide é calculado, em função das medidas dadas, por:

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{3} \sqrt{n^2 - \frac{(\ell - m)^2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\ell^2 + \ell m + m^2) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{3n^2 - (\ell - m)^2} \cdot (\ell^2 + \ell m + m^2). \end{aligned}$$

□

## Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em três ou quatro encontros de 50 minutos.

Mais uma vez usamos o Princípio da Exaustão para demonstrar uma proposição envolvendo volumes (Teorema 3). Num primeiro momento, dependendo da maturidade da sua turma, você pode evitar os detalhes técnicos da Seção 2, restringindo o argumento à parte mais intuitiva, de que “pequenos cubinhos” podem fornecer boas aproximações para o volume de um sólido. Num segundo momento, você pode avaliar com seus alunos qual é a diferença entre *existir uma boa aproximação* e *existir uma aproximação tão boa quanto se queira*. Outro aspecto importante é a exigência de que a fronteira do sólido tenha *medida nula*, muito embora uma apreciação adequada da relevância desse fato ao cálculo de volumes fuja ao escopo destas notas. Você pode, ainda, explorar o caso bidimensional, em que a razão entre as *áreas* de figuras semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança, conforme exposto na Observação 4.

O cálculo do volume do tronco de pirâmide, assim como a solução do Exemplo 5, envolve algumas técnicas algébricas simples e pode ser usado também como ilustração de aplicação dessas técnicas.

Você pode também consultar as sugestões de leitura complementar [1] e [2], para ver mais exemplos relacionados ao material discutido aqui.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha, *Geometria*, Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.
2. O. Dolce, J.N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 10, quarta edição, São Paulo, Ed. Atual, 1985.

Portal da OBMEP