Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 1 - Fundamentos

Poliedros - parte 1

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha

1 Poliedros

Figuras como o paralelepípedo ou o tetraedro são conhecidas desde a antiguidade mais remota e aparecem na natureza como cristais. Os cristais de sal de cozinha (Cloreto de Sódio, NaCl) têm o formato aproximado de um cubo. Icosaedros e dodecaedros aparecem na natureza como exoesqueletos de animais marinhos microscópicos, chamados zooplâncton. Por exemplo, as espécies *Circogonia icosahedra* e *Circorrhegma dodecahedra* têm esqueletos minerais em forma de icosaedro e dodecaedro, respectivamente.

As famosas pirâmides de Gizé, no Egito, são tumbas de faraós em formato de pirâmides quadrangurares regulares, e foram construídas há cerca de 4500 anos. Escavações feitas na Itália revelaram um dodecaedro etrusco que, provavelmente, era usado como um brinquedo há cerca de 2500 anos.

Todas as figuras citadas acima são exemplos de *poliedros*. Nesta seção, definiremos precisamente o que é um poliedro e daremos exemplos de figuras que são poliedros e de figuras que não são poliedros, segundo a definição que apresentaremos.

Seja P uma união de um número finito de polígonos planos. Dois desses polígonos, f e f', são ditos **adjacentes** quando têm um lado em comum. Eles são chamados *conectados* se existe uma sequência de polígonos adjacentes $f_0, f_1, \ldots, f_n$ $(n \geq 1)$, contidos em P e tais que $f = f_0$, $f_n = f'$ e f_{i-1} é adjacente a f_i, para $1 \leq i \leq n$.

Um conjunto $f_0, f_1, \ldots, f_n$ $(n \geq 2)$ de polígonos contidos em P é dito um *circuito*, se f_{i-1} é adjacente a f_i, para $1 \leq i \leq n$, e f_n é adjacente a f_0.

Dizemos que a união P é um **poliedro** se valem as seguintes condições:

(1) P é **conexo**, ou seja, dois polígonos quaisquer contidos em P são conectados.

(2) Cada lado de um polígono contido em P é lado de exatamente mais um polígono contido em P.

(3) Se v é vértice de um polígono contido em P, todos os polígonos que têm v como vértice formam um único circuito.

(4) Dois polígonos adjacentes contidos em P são sempre não coplanares.

Os polígonos contidos em P são denominados de **faces** de P, ao passo que os lados desses polígonos são as **arestas** de P e os vértices desses polígonos são os **vértices** de P.

A seguir, vamos explicar por meio de exemplos como as condições listadas acima evitam o aparecimento de figuras que não correspondam à ideia intuitiva que temos do que um poliedro deve vir a ser.

O objeto exibido na Figura 1 (a) não é um poliedro, porque as faces que contêm o vértice P formam *dois* e circuitos, e não um só, como exigido pela condição (3).

Na Figura 1 (b), o objeto não é um poliedro porque a aresta AC da face f_1 é compartilhada com as faces f_2 e f_3; isso contraria a condição (2). A condição (4) também não é satisfeita, pois as faces adjacentes f_2 e f_3 são coplanares.

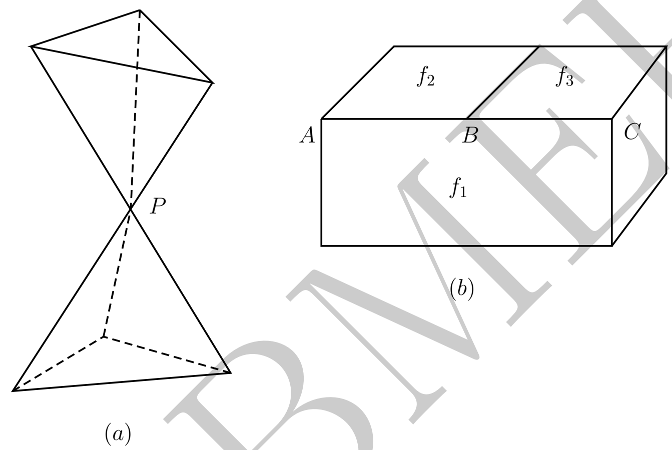

Figura 1: objetos que não são poliedros.

Na Figura 2 (a), a aresta AB é compartilhada por quatro polígonos, o que contraria a condição (2). Logo, esse objeto não é um poliedro. A Figura 2 (b) não é um poliedro porque CD não é um polígono, e um poliedro deve necessariamente ser uma união de polígonos.

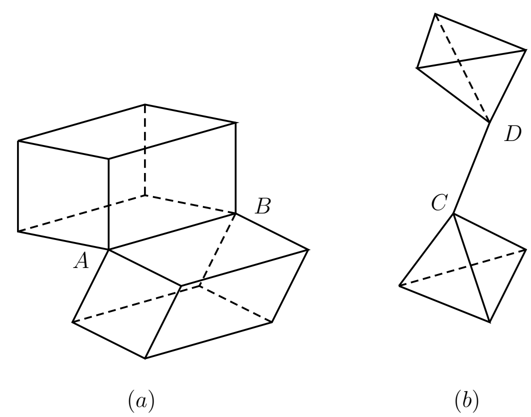

Figura 2: mais objetos que não são poliedros.

A condição (1), na definição de poliedro, exige que um poliedro seja *conexo*. Nesse sentido, a Figura 3 mostra um conjunto de polígonos que não é conexo e, por isso, não pode ser um poliedro.

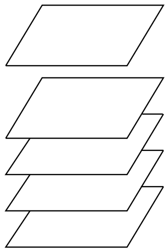

Figura 3: um conjunto de polígonos que não é conexo.

Já citamos, no início desta seção, que tetraedros, cubos, *icosaedros* e *dodecaedros* são exemplos de poliedros. Enquanto os dois primeiros são bem conhecidos, os dois últimos não o são. Estudaremos esses poliedros na segunda parte do material teórico sobre poliedros.

A Figura 4 representa um **octaedro**, que é um poliedro *convexo* (conforme definido na próxima seção), formado por oito triângulos e tal que cada um de seus vértices é vértice de exatamente quatro desses triângulos.

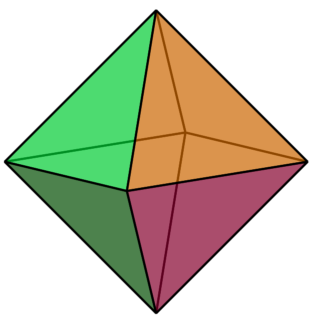

Figura 4: um octaedro.

2 Poliedros convexos

Em material teórico anterior (*Pontos, Retas e Planos*, parte 3, seção 2), definimos polígono *convexo* como um polígono em que qualquer reta contendo um de seus lados deixa todos os outros lados contidos em um dos semiplanos determinados por essa reta. Vamos, agora, estender essa noção de *convexidade* para poliedros.

Nesse mesmo material teórico anterior (*Pontos, retas e planos*, parte 3, Teorema 1) vimos que cada plano divide o espaço em dois subconjuntos chamados *semiespaços*. Cada uma das faces de um poliedro está contida em um plano. Dizemos que um poliedro P é **convexo** se, para cada uma de suas faces, o plano que a contém deixa todas as demais faces contidas em um único semiespaço, dos dois por ele determinados (veja a Figura 5).

Denotemos as faces de um poliedro P por $f_1, \ldots, f_n$. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, o plano α_i que contém a face f_i é chamado *plano suporte* da face f_i.

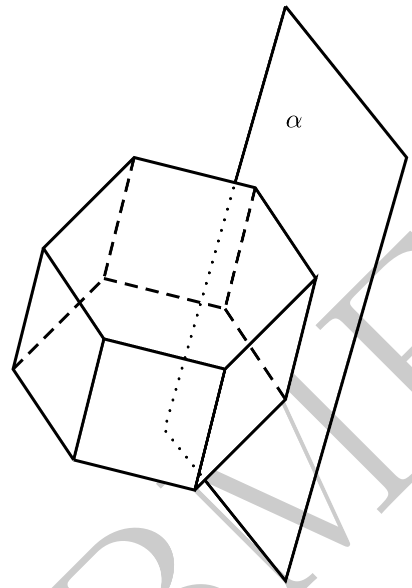

Figura 5: plano α, contendo uma face de um poliedro convexo.

Suponha que um poliedro P é convexo. Para cada i, seja E_i o semiespaço, dentre os determinados pelo plano suporte α_i da face f_i, que contém todas as outras faces de P. A interseção

$$E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$$

de todos esses semiespaços é uma região do espaço, que chamaremos de **região poliedral** correspondente ao poliedro P. Intuitivamente (e conforme mostrado na Figura 6), tal região é contituída pelo poliedro P e pela porção do espaço delimitada pelo mesmo.

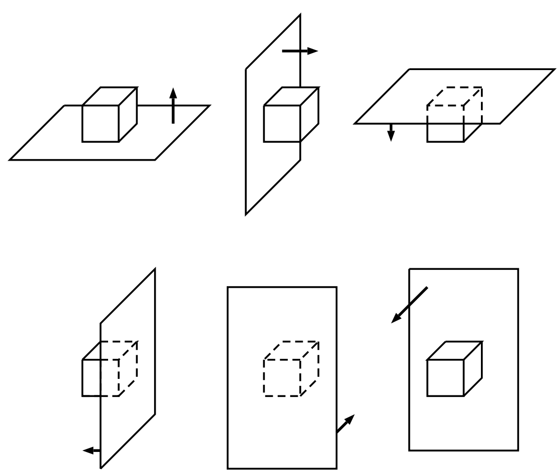

Figura 6: os planos suporte das faces de um cubo. As setas apontam para o interior de cada semiespaço E_i.

Sempre que o contexto deixar claro que o objeto que estivermos estudando é uma região poliedral, poderemos chamá-lo simplesmente de *poliedro* sem que haja risco de confusão. Por exemplo, ao falarmos em *volume de um poliedro*, é claro que estaremos nos referindo ao volume da região poliedral correspondente a esse poliedro.

Podemos enunciar e provar nosso primeiro resultado.

Teorema 1. *O segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da região poliedral correspondente a um poliedro convexo está totalmente contido nessa região.*

Prova. Seja P um poliedro convexo. Mantendo a notação estabelecida anteriormente, seja $R = E_1 \cap \cdots \cap E_n$ a região poliedral correspondente. Devemos mostrar que, dados pontos $A, B \in R$, temos $AB \subset R$.

Uma vez que A e B pertencem à interseção de todos os semiespaços E_i, esses pontos estão em cada um dos E_i. Um resultado já visto (Pontos, retas e planos, parte 3, Teorema 1, item 1) garante que o segmento AB está contido em cada um dos semiespaços E_i. Logo, AB está contido na interseção $E_1 \cap \cdots \cap E_n = R$, como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 2. *Em relação ao poliedro P da Figura 7, observe que os pontos A e B estão contidos na região poliedral correspondente a P, mas o segmento AB não está totalmente contido nessa região; o mesmo vale, por exemplo, para o segmento CD. Portanto, pelo teorema anterior, o poliedro P não é convexo.*

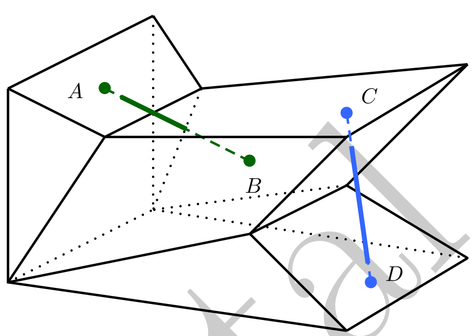

Figura 7: exemplo de um poliedro não convexo.

É possível definir a região poliedral correspondente a um poliedro P, não necessariamente convexo. Para isso, vamos assumir que P divide o espaço em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada[1], as quais nos referiremos como as *regiões do espaço delimitadas por P*. Como antes, a **região poliedral** correspondente a P é definida como a união da região limitada delimitada por P, com o próprio poliedro P. Pode ser mostrado que, quando o poliedro é convexo, esta definição coincide com a anterior.

[1] Esse fato pode ser demonstrado rigorosamente, mas as provas conhecidas não são elementares e fogem ao escopo destas notas.

Observação 3. *No que concerne a região poliedral correspondente a um poliedro qualquer (i.e., não necessariamente convexo), vale frisar que a recíproca do Teorema 1 também é válida. Mais precisamente, pode ser mostrado que, para que um poliedro P seja convexo, é suficiente que dados pontos quaisquer A e B pertencentes à região poliedral correspondente a P, o segmento AB sempre esteja totalmente contido nessa região.*

Um *polígono contido em um poliedro P* é uma sequência de segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{m-1}A_m$, com $m \geq 4$, todos contidos no poliedro P (ou seja, cada um dos quais contido em pelo menos uma das faces de P) e tais que $A_m = A_1$. Dessa forma, $A_1A_2 \cdots A_{m-1}$ é um **caminho poligonal fechado** sobre P. Observe que, se $m = 4$, o polígono $A_1A_2A_3$ é um triângulo.

Na Figura 8, vemos um polígono contido em um poliedro ser transformado em um ponto por um processo *contínuo*, i.e., ao longo do qual não há rupturas ou colagens, e tal que cada polígono intermediário também está contido no poliedro. Se um polígono contido no poliedro P puder ser transformado em um ponto pelo processo descrito acima, dizemos que o polígono é **contrátil**.

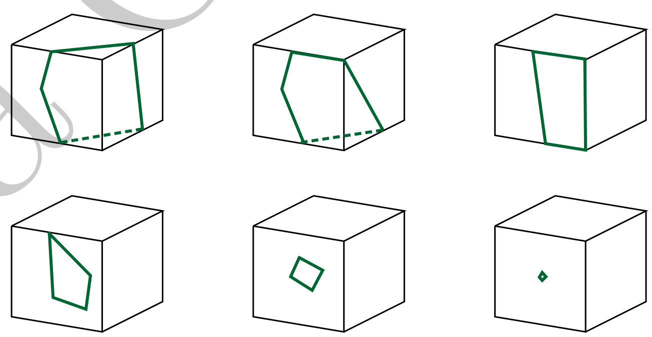

Figura 8: um polígono sendo colapsado em um ponto por uma transformação contínua que ocorre sobre a superfície de um poliedro.

Um poliedro P é denominado **simplesmente conexo** se todo polígono contido em P é contrátil. É possível mostrar que todo poliedro convexo é simplesmente conexo. Contudo, uma vez mais, uma prova desse fato está além dos propósitos e do escopo destas notas.

Existem poliedros simplesmente conexos que não são convexos. Por exemplo, o poliedro da Figura 7 é simplesmente conexo mas não é convexo. Por outro lado, o poliedro da Figura 9 não é simplesmente conexo, sendo intuitivamente claro que o polígono $ABCD$ não é contrátil.

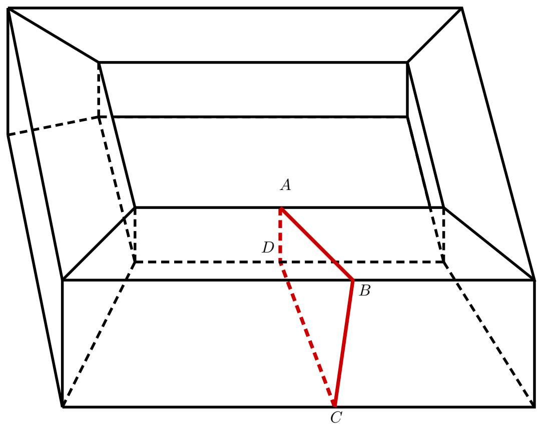

Figura 9: um poliedro que não é simplesmente conexo.

3 Contando as faces, arestas e vértices de um poliedro

Um poliedro P tem, por definição, um número finito de faces, arestas e vértices. Denotamos esses três números por F, A e V, respectivamente.

Nesta seção, exploramos algumas conexões entre os números naturais F, A e V, que não dependem do tipo particular de poliedro considerado, mas valem para todos os poliedros, ou pelo menos para uma família de poliedros satisfazendo certas condições gerais. O principal resultado nesse sentido é devido ao matemático suiço Leonhard Euler (1707 - 1783).

Teorema 4 (L. Euler, 1752). *Em um poliedro simplesmente conexo com F faces, A arestas e V vértices, vale a relação*

$$V - A + F = 2. \tag{1}$$

A relação (1) é conhecida como a **relação de Euler**. Exibiremos uma demonstração desse resultado para poliedros *convexos* na parte 2 dessa aula. Por enquanto, vamos aplicá-lo à resolução de alguns problemas envolvendo poliedros.

Além do Teorema de Euler, existem outras relações úteis entre os números de faces, arestas e vértices de um poliedro P. Para obtê-las, para $n \geq 3$ natural, denotemos por F_n o número de faces de P que têm n lados, de forma que F_3 é o número de faces triangulares de P, F_4 o número de faces quadrangulares, F_5 o número de faces pentagonais, assim por diante. Como as faces de um poliedro são polígonos, não faz sentido considerar $n \leq 2$.

O número total F de faces de P pode claramente ser escrito como

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \cdots . \tag{2}$$

Por outro lado, o conjunto das F_n faces de P com n lados contém, ao todo, nF_n arestas de P. Mas, como cada uma dessas arestas é compartilhada por exatamente duas faces, concluímos que a soma $3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$ conta cada aresta exatamente duas vezes. Assim,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots \tag{3}$$

Observe que, dentre todas as faces do poliedro P, há uma com um número máximo de lados. Se esse número máximo de lados for n, então $F_k = 0$ para $k > n$, o que mostra que as somas em (2) e (3) são, de fato, finitas.

De maneira análoga ao que fizemos acima, para cada inteiro $n \geq 3$ definimos V_n como o número de vértices de P nos quais *incidem* n arestas (veja a Figura 10).

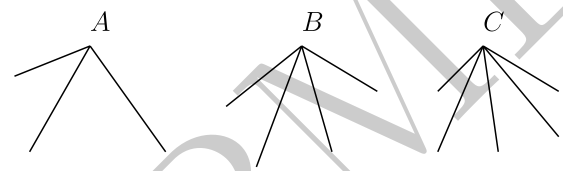

Figura 10: em A incidem três arestas, em B quatro e em C cinco.

Assim, o número total de vértices de P é dado por

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \cdots , \tag{4}$$

onde $n \geq 3$ porque não existem vértices de um poliedro com incidência menor ou igual a 2.

Novamente, podemos contar as arestas de P contando quantas arestas incidem em cada vértice e observando que cada aresta, incidindo em dois vértices, é contada duas vezes nesse processo. Dessa forma, obtemos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots . \tag{5}$$

Também nas igualdades (4) e (5) as somas são finitas, pois, de modo análogo ao que ocorre para o número de lados de uma face, existe um vértice do poliedro onde incide um número máximo de arestas.

Exemplo 5. *Prove que, em todo poliedro simplesmente conexo, existe uma face com no máximo cinco arestas.*

Prova. Multiplicando a igualdade (4) por 3, obtemos

$$\begin{aligned} 3V &= 3V_3 + 3V_4 + 3V_5 + \cdots \\ &\leq 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots \\ &= 2A. \end{aligned} \tag{6}$$

Supondo que cada face tenha pelo menos seis lados, temos

$$F = F_6 + F_7 + F_8 + \cdots$$

Multiplicando essa última igualdade por 6, obtemos

$$\begin{aligned} 6F &= 6F_6 + 6F_7 + 6F_8 + \cdots \\ &\leq 6F_6 + 7F_7 + 8F_8 + \cdots \\ &= 2A. \end{aligned}$$

Das duas desigualdades assim obtidas, $3V \leq 2A$ e $6F \leq 2A$, segue que $V \leq \frac{2A}{3}$ e $F \leq \frac{A}{3}$. Então, segue da relação de Euler que

$$2 = F - A + V \leq \frac{A}{3} - A + \frac{2A}{3} = 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, existe pelo menos uma face com no máximo cinco lados. $\square$

Para o próximo exemplo, observe que, como cada aresta de um poliedro fica completamente determinada por suas extremidades, concluímos que o número de arestas é menor ou igual ao número de modos de escolhermos dois dos vértices do poliedro. Em símbolos,

$$A \leq \binom{V}{2}. \tag{7}$$

Um tetradero tem 6 arestas e um cubo tem 12 arestas. É natural perguntarmo-nos se existem poliedros com qualquer número predeterminado de arestas. O exemplo abaixo responde essa pergunta, pelo menos no que concerne poliedros simplesmente conexos.

Exemplo 6. *Mostre que não existe um poliedro simplesmente conexo com* 7 *arestas.*

Prova. Um poliedro tem pelo menos 4 faces, isto é, $F \geq 4$. Supondo $A = 7$, tem-se

$$F - A + V = 2 \Rightarrow F + V = 9 \overset{F \geq 4}{\Longrightarrow} V \leq 5.$$

Se $V \leq 4$, segue de (7) que

$$A \leq \binom{V}{2} \leq \binom{4}{2} = 6 < 7.$$

o que é um absurdo (uma vez que $A = 7$ por hipótese). Então, concluímos que $V = 5$ e, daí, (6) garante que

$$15 = 3V \leq 2A = 14,$$

o que é um novo absurdo! Portanto A não pode ser igual a 7. $\square$

Dicas para o Professor

Duas ou três aulas de 50 minutos cada serão suficientes para cobrir o material desta parte 1.

Noções como *conexidade*, *convexidade* e *conexidade simples* fazem parte de uma área da Matemática chamada *Topologia*, onde são estudadas as propriedades de figuras geométricas que permanecem invariantes por *transformações contínuas*. Podemos entender uma transformação contínua como uma deformação da figura, sem cortes ou emendas. Um estudo rigoroso e aprofundado de Topologia não é elementar e foge ao escopo destas notas, por isso omitimos algumas demonstrações, as quais não são elementares.

Por sua importância, o Teorema de Euler será discutido em maior detalhe na parte 2 desta aula.

Mais informações sobre a definição de poliedros podem ser encontradas na referência de leitura complementar [2], capítulo 5. O exemplo de poliedro da Figura 9 foi retirado de [1], onde o leitor pode achar uma discussão consideravelmente completa sobre os diversos tipos de poliedros elementares.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.
2. C. C. de Sá e J. Rocha (eds.). *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática*. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.
3. R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Nova Iorque, Springer, 2000.