Material Teórico - Módulo Métodos de Contagem e Probabilidade

O Princípio da Casa dos Pombos - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de Fevereiro de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Outras versões do PCP

Há várias generalizações interessantes do princípio da casa dos pombos, e nossa intenção aqui é explorar algumas delas.

A proposição a seguir mostra aquela que é, provavelmente, a mais útil de todas; para seu enunciado, lembre-se de que, dado um real x, a **parte inteira** de x, denotada $\lfloor x \rfloor$, é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor x \rfloor = x$ se, e só se, $x \in \mathbb{Z}$; mais geralmente, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro n tal que

$$n \leq x < n + 1.$$

Uma propriedade fundamental da parte inteira, da qual necessitaremos, é que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1 (versão geral do PCP). *Se colocarmos n pombos em k gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos.*

Prova. Argumentando por contradição, suponha que, quando dispusemos os n pombos nas k gaiolas, nenhuma delas ficou com pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos. Então, cada uma das k gaiolas ficou com, no máximo, $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ pombos. Portanto, todas as gaiolas juntas contêm, no máximo, $k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ pombos. Mas, como

$$k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \leq k \left(\frac{n-1}{k} \right) = n - 1 < n,$$

chegamos a um absurdo. $\square$

Os exemplos seguintes utilizam a versão geral do PCP enunciada acima.

Exemplo 2. *Prove que, em qualquer grupo de vinte pessoas, há ao menos três que nasceram num mesmo dia da semana.*

Prova. Tome como gaiolas os sete dias da semana e como pombos as pessoas. A regra para por uma pessoa em uma gaiola é a mesma: o dia em que a pessoa nasceu. A versão geral do princípio da casa dos pombos garante, agora, que ao menos uma gaiola conterá, pelo menos, $\left\lfloor \frac{20-1}{7} \right\rfloor + 1 = 3$ pessoas. Assim, ao menos duas das pessoas terão nascido num mesmo dia da semana. $\square$

Exemplo 3 (União Soviética). *Pintamos os lados e as diagonais de um hexágono de vermelho ou azul. Mostre que sempre haverá um triângulo tendo por vértices três dos vértices do hexágono e tal que seus lados estão pintados com uma mesma cor.*

Prova. Fixe um dos vértices, ao qual chamaremos A, e suponha, sem perda de generalidade, que as cores sejam vermelho e azul.

Como há 5 segmentos partindo de A e 2 cores para pintá-los, a versão geral do PCP garante que pelo menos

$$\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$$

segmentos serão pintados com uma mesma cor, digamos azul.

Sendo AB, AC e AD segmentos azuis, olhemos o triângulo BCD. Se ao menos um dentre os segmentos BC, BD, CD for azul, teremos um triângulo de lados azuis (por exemplo, BD azul implica ABD de lados azuis). Senão, BC, BD, CD serão todos vermelhos, de forma que BCD será um triângulo de lados vermelhos. $\square$

Exemplo 4 (Olimpíada Internacional). *Dezessete pessoas discutem um, dentre três assuntos possíveis, por carta. Mais precisamente, cada duas das dezessete pessoas se correspondem por carta, de tal forma que exatamente um dentre os três assuntos possíveis é discutido na carta. Prove que há três pessoas que trocam cartas sobre um mesmo assunto.*

Prova. Escolha uma pessoa qualquer, digamos A. Como A se corresponde com as 16 outras pessoas sobre um dentre 3 assuntos possíveis, a versão geral do PCP garante que A troca cartas sobre um mesmo assunto com pelo menos

$$\left\lfloor \frac{16-1}{3} \right\rfloor + 1 = 6$$

outras pessoas.

Agora, sejam 1, 2 e 3 os assuntos e suponha, sem perda de generalidade, que A se corresponda com seis pessoas, digamos B, C, D, E, F, G, sobre o assunto 1. Há dois casos distintos:

(i) Pelo menos duas dentre as pessoas B, C, D, E, F, G também se correspondem sobre o assunto 1: sem perda de generalidade, sendo B e C essas duas pessoas, temos que A, B e C trocam correspondências sobre o assunto 1.

(ii) Duas quaisquer dentre as pessoas B, C, D, E, F, G se correspondem sobre os assuntos 2 ou 3: então, pelo resultado do exemplo anterior (trocando pontos por pessoas e cores por assuntos), concluímos que há três dessas seis pessoas que se correspondem sobre um mesmo assunto. □

A seguir, discutimos brevemente uma outra generalização do PCP, por vezes referida como *pombos na média*.

Proposição 5. *São dadas n gaiolas e um inteiro positivo m. Colocamos a_1 pombos na primeira gaiola, a_2 pombos na segunda, ..., a_n pombos na n-ésima gaiola. Se*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq m,$$

então ao menos uma das gaiolas conterá pelo menos m pombos.

Prova. O que se pede para provar é que pelo menos uma das desigualdades $a_i \geq m$ é verdadeira. Suponha, por contraposição, que todas sejam falsas, isto é, que

$$a_1 < m,\ a_2 < m,\ \ldots,\ a_n < m.$$

Somando membro a membro essas n desigualdades, obtemos

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < nm$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < m.$$

$\square$

Exemplo 6. *São dados dois discos A e B, de mesmo raio, cada um dos quais dividido em 200 setores iguais. Em cada disco, cada setor é pintado de branco ou preto. No disco A, há 100 setores brancos e 100 setores pretos, em uma ordem desconhecida. No disco B nós não sabemos quantos setores são brancos. Prove que é possível posicionar o disco A diretamente sobre o disco B de tal forma que ao menos 100 setores do disco A se situem sobre setores de mesma cor do disco B.*

Prova. Mantenha o disco B numa posição fixa e coloque o disco A exatamente sobre ele, de forma que cada um dos 200 setores em que A está dividido cubra exatamente um dos 200 setores em que B está dividido.

Girando o disco A um setor por vez, vemos que há 200 maneiras de posicioná-lo sobre B, às quais nos referiremos como as maneiras 1, 2, ..., 200.

Para $1 \leq i \leq 200$, seja a_i o número de coincidências de cores entre um setor de A e o setor correspondente de B, na i-ésima maneira de posicionar A sobre B. Como cada setor de B tem uma cor que coincide com a cor de 100 setores de A, concluímos que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{200} = 200 \cdot 100.$$

Então,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{200}}{200} \geq 100,$$

de maneira que $a_i \geq 100$ para pelo menos um índice $1 \leq i \leq 200$. $\square$

2 Alguns exemplos mais complicados

Como o título sugere, esta seção reúne aplicações mais complexas do PCP.

Exemplo 7 (Leningrado). *Cada casa de um tabuleiro 5×41 é pintada de vermelho ou azul. Prove que é possível escolhermos 3 linhas e 3 colunas do tabuleiro de tal modo que as 9 casas de interseção dessas linhas e colunas tenham uma mesma cor.*

Prova. Como usamos somente duas cores, a versão geral do PCP implica que, em uma coluna de 5 casas, uma das cores deve ocorrer ao menos

$$\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3.$$

Para cada uma das 41 colunas, anote a cor predominante na mesma. Novamente pela versão geral do PCP, o fato de que uma, dentre as duas cores, predomina em cada uma das 41 colunas garante que uma das duas cores predomina em pelo menos

$$\left\lfloor \frac{41-1}{2} \right\rfloor + 1 = 21$$

colunas. Podemos supor que essa cor predominante em pelo menos 21 colunas é a vermelha.

Escolha 21 colunas predominantemente vermelhas e despreze as demais. Agora, em cada uma das 21 colunas vermelhas escolhidas, selecione três das casas vermelhas e despreze as outras duas casas (mesmo que alguma delas também seja vermelha).

Uma vez que há $\binom{5}{2} = 10$ possíveis modos de escolhermos 3 das 5 casas de uma coluna e ficamos com 21 colunas, uma terceira aplicação da versão geral do PCP assegura que, em ao menos

$$\left\lfloor \frac{21-1}{10} \right\rfloor + 1 = 3$$

colunas, as casas vermelhas escolhidas ocupam exatamente as mesmas posições.

Então, temos ao menos 3 colunas tais que as casas dessas colunas, situadas em um mesmo conjunto de 3 linhas, são todas vermelhas. Isso dá a conclusão do problema. $\square$

O resultado do exemplo a seguir é conhecido como o **Teorema de Erdös-Szekeres**. Para seu enunciado, recorde que uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de números reais é *crescente* se $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ e *decrescente* se $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$. Por outro lado, se $1 \leq k \leq m$, uma *subsequência* de k termos da sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é uma sequência da forma $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, com $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$.

Exemplo 8. *Dada uma sequência qualquer de n^2+1 números reais distintos, prove que é sempre possível encontrar uma subsequência crescente ou decrescente de $n+1$ termos.*

Prova. Seja $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n^2+1}\}$ o conjunto formado pelos n^2+1 termos da sequência dada, e suponha que ela não possui uma subsequência crescente com pelo menos $n+1$ termos. Então, toda subsequência crescente que começa em um certo $x \in A$ tem no máximo n termos.

Defina a função $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ pondo

$$f(x) = \text{tamanho da maior subsequência crescente da sequência dada, começando em } x.$$

Como A tem n^2+1 elementos, a versão geral do PCP garante que teremos pelo menos

$$\left\lfloor \frac{(n^2+1)-1}{n} \right\rfloor + 1 = n+1$$

elementos de A com uma mesma imagem.

Sejam $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ esses elementos, com $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$. Se fosse $x_{i_j} < x_{i_l}$ para certos $1 \leq j < l \leq n+1$, teríamos $f(x_{i_j}) > f(x_{i_l})$, uma vez que poderíamos aumentar uma sequência crescente começando em x_{i_j}, colocando x_{i_j}

antes. Mas isso é um absurdo, pois estamos supondo que $f(x_{i_j}) = f(x_{i_l})$.

Assim, temos

$$x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_{n+1}},$$

que é uma subsequência decrescente da sequência dada, com $n+1$ termos. $\square$

A seguir, extrapolamos a versão geral do PCP para conjuntos *infinitos*.

Exemplo 9 (Bósnia). *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos. Um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ é* bom *se, para algum $n \in \mathbb{N}$, a equação $x - y = n$ tiver infinitas soluções (x, y), com $x, y \in A$. Se $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}$, prove que ao menos um dos conjuntos A_i é bom.*

Prova. Pelo PCP, para cada inteiro $k \geq 0$ existem $1 \leq i_k \leq 100$ e inteiros $x_k > y_k$ em

$$\{101k+1, 101k+2, \ldots, 101(k+1)\} \cap A_{i_k}.$$

Obtemos, assim, infinitos pares $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $\ldots$ tais que os números de cada par estão em um mesmo dos conjuntos A_1, A_2, $\ldots$, A_{100}. Além disso, $i > j \Rightarrow x_i > y_i > x_j > y_j$.

Como temos 100 conjuntos e infinitos pares (x_i, y_i), aplicando novamente o PCP, concluímos que existem um inteiro $1 \leq m \leq 100$ e um conjunto infinito $B \subset \mathbb{N}$ de índices tais que

$$i \in B \Rightarrow x_i, y_i \in A_m.$$

(Observe que, aqui, estamos usando o PCP infinitas vezes.)

Afirmamos que o conjunto A_m é bom. De fato, como $x_i - y_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, mais uma aplicação do PCP garante a existência de um inteiro $1 \leq n \leq 100$ e um conjunto infinito $C \subset B$ tais que $i \in C \Rightarrow x_i - y_i = n$. Mas, como $i \in C \Rightarrow x_i, y_i \in A_m$, concluímos que a equação $x - y = n$ admite infinitas soluções em A_m. $\square$

3 O uso que Dirichlet fez do PCP

Terminamos este material apresentando o uso que Dirichlet fez do princípio que hoje leva seu nome. Para tanto, recorde que a **parte fracionária** de $x \in \mathbb{R}$ é o número real $\{x\}$, dado por

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

Em particular, como $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, temos $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, isto é,

$$\{x\} \in [0,1),$$

com $\{x\} = 0$ se, e só se, $x \in \mathbb{Z}$.

Teorema 10 (Dirichlet). *Se α é um irracional qualquer, então existem infinitos racionais $\frac{x}{y}$, com x e y inteiros não nulos, primos entre si e tais que*

$$\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}.$$

Prova. Seja $n > 1$ um inteiro qualquer e considere os $n+1$ números $\{j\alpha\} \in [0,1)$, com $j = 0, 1, \ldots, n$. Como

$$[0,1) = \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right),$$

uma união de n conjuntos, o princípio da casa dos pombos garante a existência de índices $0 \leq k < j \leq n$ tais que $\{j\alpha\}$ e $\{k\alpha\}$ pertencem a um mesmo intervalo dos que aparecem no lado direito da igualdade acima. Então $|\{j\alpha\} - \{k\alpha\}| < \frac{1}{n}$ ou, o que é o mesmo,

$$|(j-k)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor)| < \frac{1}{n}.$$

Segue, daí, que

$$\left|\alpha - \frac{\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor}{j-k}\right| < \frac{1}{(j-k)n} \leq \frac{1}{(j-k)^2}, \qquad (1)$$

e fazendo $x = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor$ e $y = j - k$, temos $0 < y \leq n$ e $\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}$. Por outro lado, se $d = \text{mdc}(x, y)$ e $x = dx_1, y = dy_1$, então

$$\left|\frac{x_1}{y_1} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{y_1^2},$$

de modo que podemos supor que $\text{mdc}(x, y) = 1$.

Para garantirmos a existência de infinitos tais pares, sejam x e y inteiros não nulos, primos entre si e tais que $\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}$. Escolhendo um natural n_1 tal que $\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| > \frac{1}{n_1}$ e repetindo (com n_1 no lugar de n) o argumento que levou a (1), obtemos inteiros não nulos e primos entre si x_1 e y_1, tais que $0 < y_1 \leq n_1$ e

$$\left|\frac{x_1}{y_1} - \alpha\right| < \frac{1}{n_1 y_1} \leq \frac{1}{y_1^2}.$$

Por outro lado,

$$\left|\frac{x_1}{y_1} - \alpha\right| < \frac{1}{n_1 y_1} \leq \frac{1}{n_1} < \left|\frac{x}{y} - \alpha\right|,$$

de sorte que $\frac{x_1}{y_1} \neq \frac{x}{y}$. Repetindo esse argumento sucessivas vezes, obtemos uma infinidade de pares (x, y) com as propriedades desejadas. $\square$

Dicas para o Professor

Como no material anterior, este material foi parcialmente baseado na seção 4.1 da referência [1]. Lá, o leitor pode encontrar vários outros exemplos resolvidos e problemas propostos utilizando o Princípio da Casa dos Pombos. O capítulo 7 da referência [3] também pode ser consultado nesse sentido.

O conteúdo aqui reunido pode ser apresentado em quatro sessões de 50 minutos cada. Nesse esquema, reserve a primeira sessão para debater generalizações do problema de *pensar no pior caso*, concentrando-se no exemplo 2 e em variações do mesmo (que podem ser obtidas das referências [1] e [3]). A segunda sessão pode ser reservada às aplicações menos elaboradas da versão geral do PCP. A terceira sessão pode ser devotada à discussão dos três exemplos da seção 2, enquanto a última sessão de 50 minutos pode abordar o Teorema de Dirichlet. Nesse sentido, um uso importante do Teorema de Dirichlet (que pode ser pelo menos ventilado na quarta sessão) é na caracterização das soluções da *equação de Pell*

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

em que d é um natural *livre de quadrados* e x e y são inteiros. A esse respeito, veja seção 2.2 da referência [3].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2024.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2022.

3. J. Plínio de O. Santos et al. *Introdução à Análise Combinatória*, quarta edição. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.