Material Teórico - Módulo de FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO

Frações e suas Operações

Sexto Ano do Ensino Fundamental

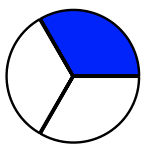
Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Após termos estudado, no módulo anterior, um pouco sobre os números naturais e suas principais propriedades de divisibilidade, chegou a hora de conhecermos uma classe maior de números, que chamamos de **frações**[1] ou, ainda, **números fracionários**.

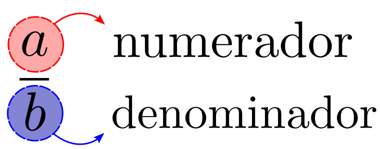
Você com certeza já deve ter usado bastante o conceito de **metade** ou **um terço**. Por exemplo, imagine que você e mais dois de seus amigos saíram para comer uma pizza. Se todos concordaram em comer quantidades iguais, cada um deverá ter comido um terço da pizza. O símbolo matemático que denota este valor é $\frac{1}{3}$. Visualmente, é fácil entender o significado deste número:



$$= \frac{1}{3}$$

Assim, o $\frac{1}{3}$ significa que cada um de vocês comeu uma parte, dentre três partes iguais.

De modo geral, o conjunto das frações é formado por todos números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são número naturais, sendo $b > 0$. Além disso, cada um desses dois naturais a e b que formam uma fração recebe um nome especial: enquanto a é chamado de **numerador**, o inteiro b é chamado de **denominador**.



Observe que uma fração é o resultado de uma divisão. Por exemplo, suponha que Joãozinho ganhou 12 bombons e que deseja repartir igualmente esses bombons entre ele e seus dois irmãos. Então, cada um ficará com a terça parte do total de 12 bombons, de forma que $\frac{12}{3} = 4$. Em outras palavras, cada um ficará com 4 bombons.

Na igualdade $\frac{12}{3} = 4$ podemos observar dois conceitos importantes sobre frações:

- *Todo número natural também é uma fração.*

  De fato, todo número natural a é o resultado da divisão de a por 1. Matematicamente, podemos escrever a igualdade
  $$a = \frac{a}{1}.$$
  Sendo assim, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números inteiros está contido no conjunto das frações.

- Outro fato importante é:

[1] do Latim: *fractus*, que significa quebrado.

Existem várias formas de se representar uma mesma fração.

Por exemplo, da mesma forma que podemos obter o número 4 fazendo a divisão de 12 por 3, também podemos obter este valor quando dividimos 20 por 5. Ou seja,
$$4 = \frac{12}{3} = \frac{20}{5}.$$

Agora que você entendeu que frações aparentemente diferentes na verdade são iguais, você pode estar se questionando:

Como, então, saber quais são as diferentes formas de se representar uma mesma fração?

Bem, a resposta a essa pergunta é muito simples:

— Sempre que você tiver uma fração $\frac{a}{b}$, ao multiplicarmos ou dividirmos o **numerador e o denominador** desta fração **por um mesmo número natural** (que deve ser diferente de zero), o resultado será uma outra representação da mesma fração.

Por exemplo, na fração $\frac{3}{5}$, se multiplicarmos o numerador e o denominador por 4, obteremos
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}.$$

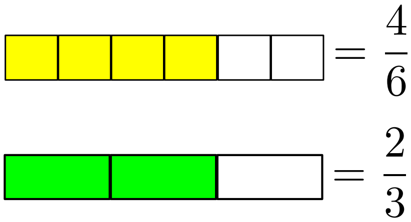
Outro exemplo, desta vez utilizando a operação de divisão:
$$\frac{28}{42} = \frac{28 \div 7}{42 \div 7} = \frac{4}{6}.$$

Intuitivamente, é claro que, ao multiplicarmos o numerador e o denominador por um mesmo número natural não nulo, estamos aumentando esses valores, tornando a representação da fração "mais complicada". Por outro lado, ao dividirmos o numerador e o denominador por um mesmo natural não nulo, estamos diminuindo esses valores e, consequentemente, **simplificando** a representação da fração. Dessa forma, voltando ao exemplo anterior, $\frac{4}{6}$ é uma simplificação da fração $\frac{28}{42}$. Outra forma comum de expressar esta operação é dizer que $\frac{4}{6}$ é **uma forma reduzida** da fração $\frac{28}{42}$.

Observe, ainda, que podemos reduzir $\frac{4}{6}$ para $\frac{2}{3}$ dividindo numerador e o denominador por 2. Por outro lado, não podemo reduzir ainda mais a fração $\frac{2}{3}$, já que não existe nenhum número natural maior que 1 que divida 2 e 3 ao mesmo tempo. Dizemos, pois, que $\frac{2}{3}$ é uma **representação irredutível** da fração, ou, simplesmente (e sempre que não houver perigo de confusão), uma **fração irredutível**.

Visualmente é fácil ver que $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ representam uma mesma fração:

Generalizando a discussão anterior, veja que toda fração irredutível $\frac{a}{b}$ é tal que seus numerador e denominador não são divisíveis por número natural algum maior que 1; de outra forma, a e b são *primos entre si*: $\text{mdc}\,(a, b) = 1$.



2 Somando e subtraindo frações com denominadores iguais

Assim como podemos realizar as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) no conjunto dos números naturais, também podemos realizá-las no conjunto dos números fracionários. Iniciaremos esta seção com um caso bem simples: *a adição de frações de mesmo denominador.*

Vamos começar nossa discussão com uma interpretação concreta dessa operação. Na figura 1, cada barra está dividida em sete partes, portanto cada parte representa $\frac{1}{7}$ (um sétimo) do total. Na primeira barra, estão destacadas em amarelo quatro das sete partes – representando o número fracionário $\frac{4}{7}$; na segunda barra, estão destacadas em vermelho duas das sete partes – representando o número fracionário $\frac{2}{7}$. A adição de 2 partes e 4 partes dá-nos um total de 6 partes, cada uma representando $\frac{1}{7}$ do total. Logo,

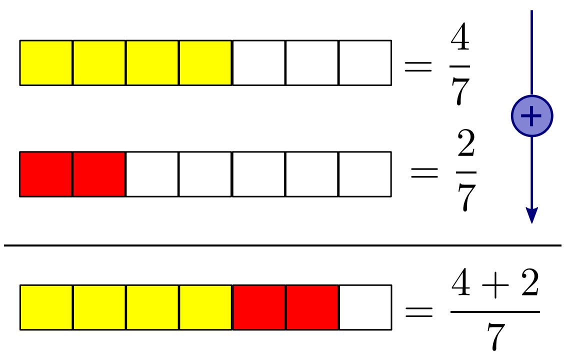


Figura 1: somando frações de mesmo denominador.

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}.$$

De maneira geral, temos a seguinte regra:

Soma de Frações de Mesmo Denominador:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Alguns exemplos:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}.$$

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4+1}{5}=\frac{5}{5}=1.$$

$$\frac{1}{15}+\frac{4}{15}=\frac{1+4}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

A subtração segue o mesmo princípio:

Subtração de Frações de Mesmo Denominador (com $a > b$):

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

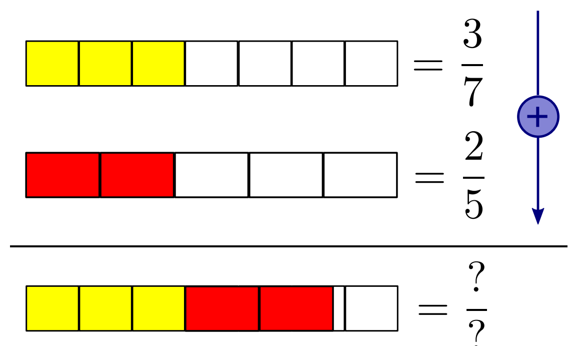
Alguns exemplos:

$$\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{6-2}{7}=\frac{4}{7}.$$

3 Somando e subtraindo frações com denominadores distintos

Já vimos que somar e subtrair frações com um mesmo denominador é realmente muito fácil. Vejamos o que acontece quando tentamos realizar estas operações quando estamos lidando com frações com denominadores diferentes.



Na figura acima, a primeira barra está dividida em sete partes iguais. A segunda barra (que é idêntica à primeira) está dividida em cinco partes iguais. Dessa forma, a porção amarela representa $\frac{3}{7}$ da primeira barra, enquanto a porçao vermelha representa $\frac{2}{5}$ da segunda barra. Veja que, nesse caso, não podemos “encaixar” perfeitamente uma porção de tamanho igual a $\frac{1}{5}$ da barra em uma porção de tamanho igual a $\frac{1}{7}$. Isso não ocorria no exemplo inicial da seção anterior, uma vez que, naquele exemplo, todas as porções menores representavam uma mesma fração (no caso, $\frac{1}{7}$) das barras lá consideradas. Como resolver nosso problema atual, então? Aqui, iremos recorrer à flexibilidade da representação da frações.

Lembre-se de que já sabemos somar frações de mesmo denominador. A ideia é, então, utilizar esse caso para calcular $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}$. Para tanto, buscaremos representar as frações $\frac{3}{7}$ e $\frac{2}{5}$ usando um mesmo denominador. Para o que falta, basta seguirmos os seguintes passos:

1. Multiplique o numerador e o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda fração:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}.$$

2. Multiplique o numerador e o denominador da segunda fração pelo denominador da primeira fração:

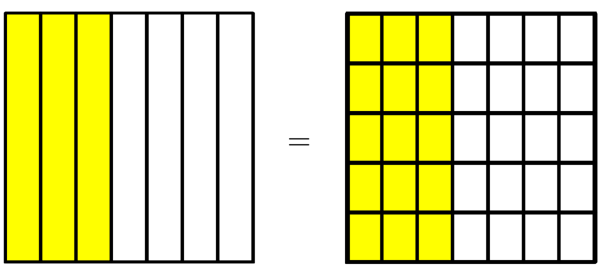
$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$$

3. Some os números fracionários em questão, com o auxílio do caso já estudado:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{15+14}{35} = \frac{29}{35}.$$

Geometricamente, os passos acima possuem a seguinte interpretação:

1. Imagine um quadrado dividido em sete partes iguais por seis retas verticais. A fração $\frac{3}{7}$ é representada pela porção amarela da figura a seguir. Quando fazemos $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}$, estamos, em verdade, subdividindo o quadrado em 35 partes iguais, utilizando quatro retas horizontais. Das 35 partes em que o quadrado ficou dividido, 15 serão amarelas.

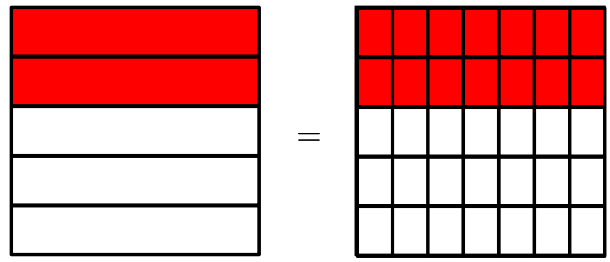


$$\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

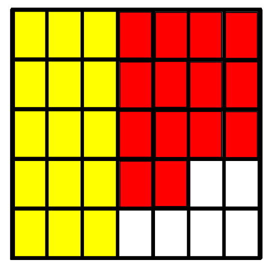
2. Da mesma forma, dividindo um quadrado idêntico ao anterior em cinco partes iguais, com o auxílio de quatro retas horizontais, a fração $\frac{2}{5}$ será representada pela porção vermelha da segunda figura. Quando fazemos $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$, estamos, de fato, subdividindo o quadrado em 35 partes iguais, usando seis retas verticais. Assim, das 35 partes em que o quadrado ficou dividido, 14 serão vermelhas.

3. Agora que as áreas pintadas dos dois quadrados são múltiplas de uma mesma área comum (a área de um dos 35 retângulos nos quais os quadrados ficara divididos), podemos somar as quantidades de áreas pintadas, obtendo

$$15 + 14 = 19.$$



$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$



$$\frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$$

Portanto,

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{15+14}{35} = \frac{29}{35}.$$

De maneira geral, temos a seguinte regra geral para a adição de frações:

> **Soma de Frações com Denominadores Distintos:**
>
> $$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} + \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}.$$

Alguns exemplos:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}.$$

$$\frac{7}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{21+2}{6} = \frac{23}{6}.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}.$$

A subtração segue o mesmo princípio (contanto que, como antes, a primeira fração seja maior que a segunda):

> **Subtração de Frações com Denominadores Distintos:**
>
> $$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} - \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{c \cdot d}.$$

Alguns exemplos:

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}.$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}.$$

4 Multiplicando e dividindo frações

Multiplicar frações é muito fácil. Basta multiplicarmos os numeradores para obtermos o numerador do produto e, para obter o denominador do produto, basta multiplicar os denominadores das frações. Por exemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

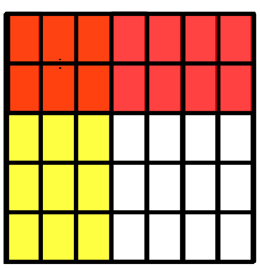
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}.$$

De maneira geral, temos a seguinte regra geral:

Multiplicação de Frações:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Como antes, a multiplicação de frações também possui uma representação geométrica: ela é a interseção entre as áreas que representam cada uma das frações após uma sobreposição. Por exemplo, ao fazermos o produto $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$, podemos imaginar os mesmos dois quadrados que utilizamos na seção anterior. Sobrepondo os dois quadrados, encontramos uma área laranja que representa o valor $\frac{6}{35}$.



Para fazermos a divisão de duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, multiplicamos a primeira pela inversa da segunda. Assim:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}.$$

Outro exemplo:

$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}.$$

De maneira geral, temos a seguinte regra geral:

Divisão de Frações:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

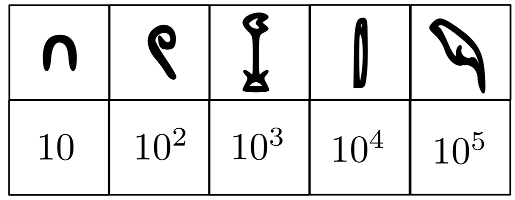


Figura 2: hieróglifos representando potências de 10.

5 Um pouco de história

Os egípcios foram um dos primeiros povos que utilizaram o conceito de fração. O seu sistema de numeração era formado por *hieróglifos* que representavam as potências de 10 (veja a figura 2):

Já os racionais eram escritos como soma de frações com numeradores iguais a 1. Por exemplo, a fração $\frac{5}{6}$ era escrita como $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. O hieróglifo que indicava a fração era semelhante a uma boca, e significava "parte":

Por exemplo, $\frac{1}{10}$ era escrito como:

$$= \frac{1}{10}$$

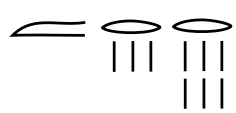
Algumas frações possuíam hieróglifos especiais. Por exemplo:

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Dessa forma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ era escrito como:



Até os dias atuais, frações do tipo $\frac{1}{n}$ são chamadas de **frações egípcias**. Apesar de seu uso prático ter ficado no passado, as frações egípcias continuam sendo objeto de estudo em Teoria dos Números e em Matemática recreacional. Podemos até mesmo citar um dos mais famosos problemas em aberto (isto é, até hoje ainda não resolvidos por ninguém) sobre frações egípcias: a conjectura de Erdös–Straus.

Os matemáticos P. Erdös e E. Straus conjecturaram, em 1948, que toda fração do tipo $\frac{4}{n}$, com $n \geq 5$, pode ser escrita como a soma de três frações egípcias. Ou seja, eles conjecturaram que a equação

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \tag{1}$$

sempre tem soluções naturais positivas x, y, z, para todo natural $n \geq 5$. Por exemplo, para $n = 5$, temos:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

Com o auxílio de computadores, foi demonstrado que a conjectura de Erdös-Straus é verdadeira para todo natural n tal que $5 \leq n \leq 10^{14}$. Porém, até hoje ninguém foi capaz de demonstrar o caso geral ou refutar a conjectura, apresentando um valor natural $n \geq 5$ para o qual a equação (1) não tenha soluções naturais positivas x, y, z. Caso esteja curioso para aprender mais sobre frações egípcias, consulte as referências [1], [2] ou [3].

6 Sugestões ao professor

Apresentar os conceitos básicos sobre números fracionários a alunos que estão apenas começando a aprender um pouco mais sobre Matemática não é uma tarefa fácil. Porém é muito importante que os alunos fixem bem as ideias que são apresentadas nesta aula. O professor deve estar seguro de que sua turma entendeu bem os conceitos da multiplicidade da representação de frações e as interpretações concretas da soma de frações com um mesmo denominador.

Tente fazer um bom número de exemplos diferentes sobre os conceitos básicos, à medida que eles forem apresentados. Mantenha um foco especial nos exemplos com figuras geométricas. Se você tiver bastante tempo disponível em suas aulas, tente fazer esses exemplos utilizando técnicas de *recorte e cole*.

É provável que alguns alunos, ao fim da aula, ainda tenham dúvidas sobre a soma de frações com denominadores diferentes. Isso é perfeitamente normal. Nas próximas aulas de exercícios, vocês terão a oportunidade de exercitar esse assunto até que as dúvidas desapareçam.

A última seção dessa aula é optativa. Caso você perceba que sua turma evoluiu bem no conteúdo apresentado, você poderá falar um pouco sobre as frações egípcias e até mesmo sobre a conjectura de Erdös–Straus. Certamente, muitos alunos não entenderão a conjectura em si, mas se alguns deles entenderem que existem problemas na Matemática em relação aos quais ainda se sabe a resposta, isso já terá sido algo fantástico! Lembre-se de manter a curiosidade de sua turma elevada! Boa aula!

Referências

[1] Ronald L. Graham. Paul Erdös and Egyptian fractions. *Erdös centennial, Bolyai Soc. Math. Stud.*, 25:289–309, 2013.

[2] Gay Robins and Charles Shute. *The Rhind Mathematical Papyrus: an ancient Egyptian text.* Dover, 1987.

[3] Dirk J. Struik. *A Concise History of Mathematics.* Dover, 1967.