Material Teórico - Inequações-Produto e Quociente de Segundo Grau

Introdução às Inequações de Segundo Grau

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de março de 2020

1 Inequações do segundo grau

Neste material, faremos um estudo introdutório sobre inequações do segundo grau. Iniciamos com o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Para quais números reais x vale*

$$-x^2 + 6x - 8 \leq 0?$$

Solução. Vamos começar "completando quadrados" em $-x^2 + 6x - 8$:

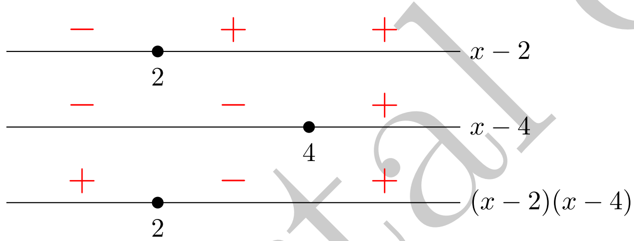
$$\begin{aligned}
-x^2 + 6x - 8 &= -\left(x^2 - 6x + 8\right) \\
&= -\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 8\right) \\
&= -\left((x-3)^2 - 1\right) \\
&= -\left((x-3)^2 - 1^2\right) \\
&= -(x - 3 + 1)(x - 3 - 1) \\
&= -(x-2)(x-4).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-x^2 + 6x - 8 \leq 0 &\iff -(x-2)(x-4) \leq 0 \\
&\iff (x-2)(x-4) \geq 0.
\end{aligned}$$

Veja agora que, para que tenhamos $(x-2)(x-4) \geq 0$, um dos fatores $x-2$ ou $x-4$ deve ser igual a zero ou os dois fatores devem possuir *um mesmo sinal*, ou seja, devem ser ambos positivos ou ambos negativos.

Nesse sentido, o diagrama abaixo usa o *estudo dos sinais* dos fatores $x-2$ e $x-4$ para estudar o sinal do produto $(x-2)(x-4)$: Observe que o que fizemos foi simplesmente

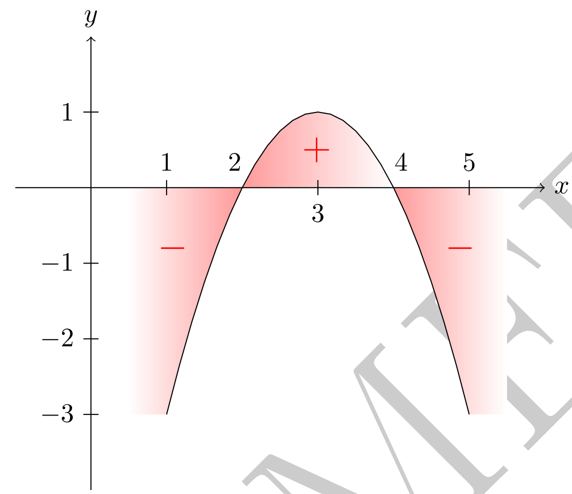


usar a regra de produto de sinais para, conhecendo os sinais de $x-2$ e $x-4$, obter o sinal de $(x-2)(x-4)$; por exemplo, para $x = 3$ temos $x - 2 > 0$ e $x - 4 < 0$, logo, $(x-2)(x-4) < 0$.

O **conjunto-verdade** V da inequação $-x^2 + 6x - 8 \leq 0$ é o subconjunto de $\mathbb{R}$ cujos elementos a tornam verdadeira. Como vimos que $-x^2+6x-8 \leq 0$ equivale a $(x-2)(x-4) \geq 0$, podemos declarar V facilmente examinando os sinais na última linha do diagrama acima. Então,

$$V = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\} = [-\infty, 2] \cup [4, +\infty].$$

Uma maneira alternativa de resolver o exemplo é considerar a função quadrática $f(x) = -x^2 + 6x - 8 =$



$-(x-2)(x-4)$. Para tanto, invocando o que foi estudado no módulo de funções quadráticas, temos que o gráfico de f é uma parábola com concavidade voltada para baixo, com raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$ e vértice em $(3, 1)$.

Como $-x^2+6x-8 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$, queremos o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tal que o ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f está sobre o eixo dos x (se $f(x) = 0$) ou abaixo dele (se $f(x) < 0$). Olhando para o gráfico, mais um vez concluímos que o conjunto-verdade da inequação $-x^2 + 6x - 8 \leq 0$ é

$$V = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\} = [-\infty, 2] \cup [4, +\infty].$$

□

Exemplo 2. *Resolva a inequação abaixo em $\mathbb{R}$.*

$$4x^2 - 4x - 3 < 0$$

Solução. Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$. Em relação à notação padrão $f(x) = ax^2 + bx + c$ para funções de segundo grau, temos $a = 4$, $b = -4$, $c = -3$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) \\
&= 64,
\end{aligned}$$

de sorte que f tem raízes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

e

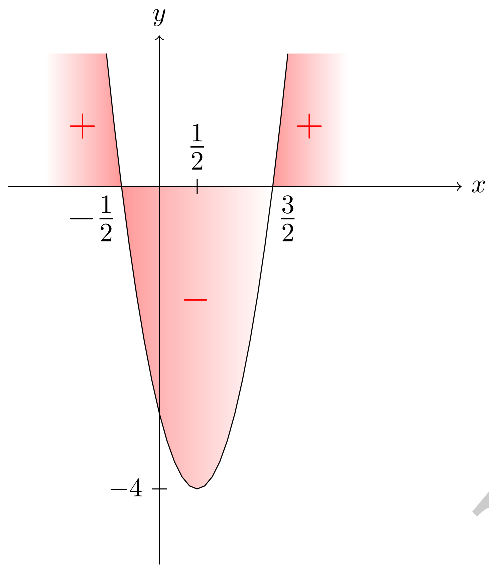
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2}.$$

Agora, veja que a parábola que representa o gráfico de f

tem vértice no ponto cujas coordenadas são

$$\begin{aligned}\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) &= \left(\frac{-(-4)}{2\cdot 4}, \frac{-64}{4\cdot 4}\right)\\ &= \left(\frac{4}{8}, \frac{-64}{16}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}, -4\right).\end{aligned}$$

Além disso, uma vez que $a = 4 > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima. Observe um esboço do gráfico de f na figura abaixo:



Portanto, o conjunto-verdade V da inequação $4x^2-4x-3 < 0$ é o conjunto das abscissas dos pontos do gráfico que estão situados abaixo do eixo horizontal, de modo que

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}.$$

$\square$

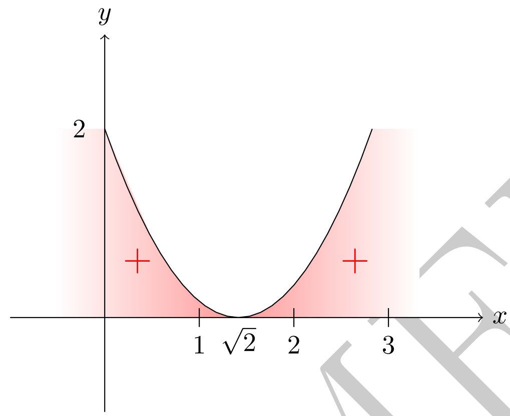
Exemplo 3. *Para quais valores reais de x vale que*

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0?$$

Solução. Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$. Como $2 = \sqrt{2}^2$, temos que

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\\ &= x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}^2\\ &= (x-\sqrt{2})^2,\end{aligned}$$

logo, $\sqrt{2}$ é a única raiz real de f. Desse modo, a parábola que representa o gráfico de f tem vértice no ponto cujas coordenadas são $(\sqrt{2}, 0)$ e, uma vez que o coeficiente de x^2 é igual a $1 > 0$, essa parábola possui concavidade voltada para cima. Na figura acima, vemos um esboço do gráfico de f.



Como queremos que $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0$, temos de evitar somente o ponto $x = \sqrt{2}$, uma vez que, nele, vale $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$. Portanto, o conjunto-verdade da inequação $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0$ é

$$V = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}.$$

$\square$

Exemplo 4. *Resolva a inequação $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$ em $\mathbb{R}$.*

Solução. Uma primeira possibilidade é começar como na primeira solução do primeiro exemplo, completando quadrados:

$$\begin{aligned}-x^2 + 4x - 5 &= -(x^2 - 4x + 5)\\ &= -(x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 + 1)\\ &= -((x-2)^2 + 1)\\ &= -(x-2)^2 - 1.\end{aligned}$$

Como $(x-2)^2 \geq 0$, obtemos que $-(x-2)^2 \leq 0$. Daí, segue que

$$-x^2 + 4x - 5 = -(x-2)^2 - 1 < 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, o conjunto-verdade da inequação $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$ é

$$V = \emptyset.$$

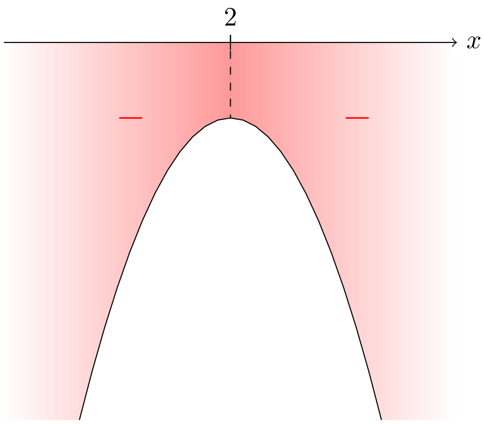
De outro modo, considerando a função de segundo grau $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, vemos que ela não possui raízes reais, pois (com $a = -1$, $b = 4$, $c = -5$)

$$\begin{aligned}\Delta &= 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-5)\\ &= 16 - 20\\ &= -4.\end{aligned}$$

Além disso, como $a = -1$, a parábola que representa o gráfico de f possui concavidade voltada para baixo. Por fim, o gráfico tem vértice no ponto

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{4}{2(-1)}, -\frac{-4}{4(-1)}\right) = (2, -1).$$

Assim, o gráfico de f tem a forma a seguir, e claramente não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$. De outra forma, isso



é o mesmo que dizer que o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tal que $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$ é o conjunto vazio. $\square$

Agora que já exercitamos razoavelmente a parte *operacional* da solução de inequações de segundo grau, vejamos um exemplo um pouco mais difícil.

Exemplo 5. *Um homem, ao falecer na pandemia da Covid-19, deixou de herança a quantia de* R\$ 200.000 *para ser distribuída entre seus filhos, de modo que cada um deles recebesse a mesma parte. Entretanto, três desses filhos renunciaram às suas partes, fazendo com que os demais filhos recebessem uma quantia adicional, além da que receberiam inicialmente. Qual deve ser o número mínimo de filhos que esse homem deve ter para que essa quantia adicional seja inferior a* R\$ 15.000*?*

Solução. Denotemos por x a quantidade de filhos do homem. Assim, inicialmente, cada um dos filhos receberia

$$\frac{200.000}{x}.$$

Entretanto, com a renúncia de três dos filhos, cada um dos outros $x - 3$ filhos deve receber

$$\frac{200.000}{x-3}.$$

Logo, a diferença entre a quantia que cada filho receberia inicialmente e a quantia recebida depois da renúncia de três dos filhos é

$$\frac{200.000}{x-3} - \frac{200.000}{x}.$$

Estamos interessados em calcular o número mínimo de filhos que esse homem deve ter para que essa quantia adicional seja inferior a R\$ 15.000. Portanto, devemos resolver a inequação

$$\frac{200.000}{x-3} - \frac{200.000}{x} < 15.000,$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{40}{x-3} - \frac{40}{x} < 3.$$

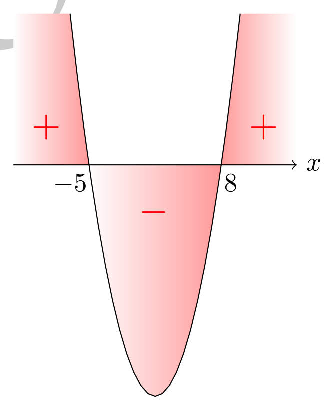
Agora,

$$\begin{aligned} \frac{40}{x-3} - \frac{40}{x} < 3 &\iff \frac{40x - 40(x-3)}{x(x-3)} < 3 \\ &\iff \frac{120}{x(x-3)} < 3 \\ &\iff \frac{40}{x(x-3)} < 1. \end{aligned}$$

Uma vez que a quantidade de filhos é maior que 3, obtemos $x(x-3) > 0$. Desse modo, a última inequação acima é equivalente a

$$x(x-3) > 40 \iff x^2 - 3x - 40 > 0.$$

Considerando a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x - 40$, temos que f possui raízes $x_1 = -5$ e $x_2 = 8$. Além disso, a parábola que representa o gráfico de f possui concavidade voltada para cima. Assim, temos a seguinte representação do gráfico de f:



Portanto, a inequação $x^2 - 3x - 40 > 0$ é satisfeita se, e somente se, $x > 8$. Desse modo, o número mínimo de filhos para que a quantia adicional seja inferior a R\$ 15.000,00 é 9. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. O objetivo, aqui, é introduzir as inequações do segundo grau, as quais serão pré-requisitos para resolver inequações-produto e quociente envolvendo trinômios de segundo grau. Desse modo, é fundamental que não restem dúvidas sobre os tipos de inequações apresentados neste material. Portanto, recomendamos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre que possível dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

As referências a seguir trazem mais informações e exercícios, de variados graus de dificuldade, sobre inequações de segundo grau.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, Editora, 2013.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.