Material Teórico - Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem

Permutações circulares

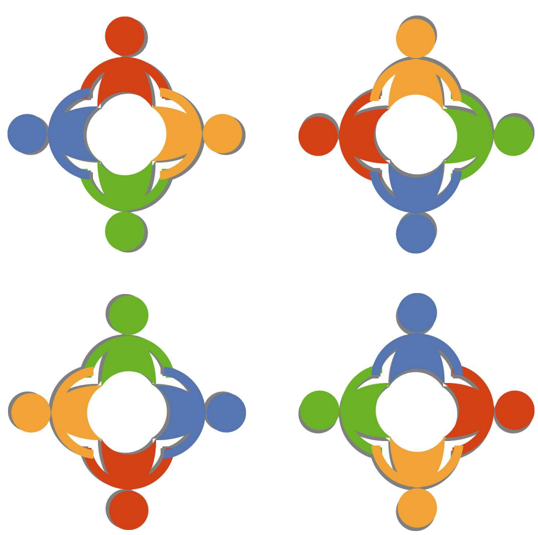
Segundo Ano do Ensino Médio

Prof. Fabrício Siqueira Benevides

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Permutações Circulares

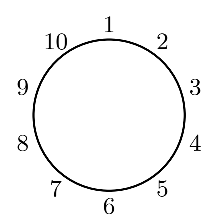
Estudamos anteriormente que, dado um grupo de n pessoas, o número de maneiras de formar uma fila indiana com elas é igual a $n!$. Isso corresponde ao número de permutações de um conjunto de n elementos. Agora, queremos calcular o número de maneiras de colocar um grupo de n pessoas em volta de um círculo. Pense, por exemplo, em montar uma roda de dança com essas pessoas. É importante ressaltar que o grupo de pessoas pode girar ao redor do círculo livremente, desde que não seja alterada a ordem relativa entre elas. De outra forma, estamos considerando relevante apenas a posição relativa entre as pessoas, e não suas posições absolutas. Ou seja, olhando esse círculo de cima, não é importante quem está na posição "Norte". Esse tipo de disposição recebe o nome de *permutação circular*. Por exemplo, as quatro rotações de um grupo de 4 pessoas, conforme exibidas na Figura 1, devem ser contabilizadas como uma única forma de distribuí-las em torno da roda. Dizemos, ainda, que essas quatro rotações correspondem a uma única permutação circular.



Vejamos como calcular a quantidade de permutações circulares de um conjunto com n objetos. Continuando com a analogia de montar uma roda com n pessoas, nomeemos as pessoas de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Primeiramente, coloquemos a pessoa X_1 em algum lugar de um círculo. Observe que, como não há ninguém lá ainda, o local onde essa pessoa vai ficar é irrelevante. De fato, sequer existem n posições pré-determinadas no círculo: a pessoa X_1 poderia, na verdade, ficar em qualquer dos infinitos pontos que delimitam um círculo. Portanto, podemos assumir, sem perda da generalidade, que X_1 ficará na posição "Norte". Uma vez que X_1 assume o seu lugar, temos um ponto de referência para colocar as demais pessoas. Podemos, então, escolher quem ficará imediatamente à esquerda de X_1. Para tal escolha, temos $n-1$ possíveis candidatos. Uma vez feita tal escolha, selecionamos a pessoa que ficará à esquerda daquela que acabamos de escolher. Temos $n-2$ candidatos para esta pessoa (visto que duas pessoas já estão na roda). Continuamos com esse procedimento de escolhas sucessivas, até que alocar todas as pessoas e, por conseguinte, fechar a roda. Pelo princípio multiplicativo, segue que o número total de maneiras de montar a roda é igual a $(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = (n-1)!$.

Um erro bastante comum ao resolver-se o problema anterior é o seguinte: normalmente, imaginamos n posições predefinidas em volta do círculo, como no exemplo da Figura 1, onde iremos colocar as pessoas; em seguida, nos perguntamos quem irá ficar em cada posição. Temos n possíveis pessoas que podem ocupar a posição 1; uma vez escolhida tal pessoa, temos $n-1$ candidatos para ocupar a posição 2, e assim por diante, até chegarmos à situação em que teremos 2 candidatos para ocupar a posição $n-1$ e apenas 1 candidato (a pessoa que sobrar) para ocupar a posição n. Dessa forma, concluímos (erroneamente!) haver um total de $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ maneiras de distribuir as pessoas. O problema com esse argumento é que, ao fazê-lo, estamos *contando em excesso*. Estamos ignorando o fato de que, quando uma certa distribuição (de pessoas na roda) for uma rotação de outra distribuição, ambas deveriam ser contadas uma única vez. Entretanto, pode-se observar que cada configuração está sendo contada exatamente n vezes, pois uma configuração pode ser rotacionada n vezes até voltar à sua posição original (veja a Figura 2). Observe que cada uma dessas n rotações foi contabilizada anteriormente, em nossa contagem errônea. Logo, a fim de obter o valor correto, devemos dividir $n!$ por n, obtendo-se $n!/n = (n-1)!$, o que coincide com o resultado do parágrafo anterior.

Figura 1: o caso $n = 10$.

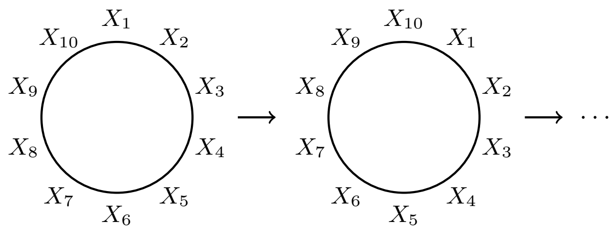


Podemos resumir a discussão anterior da seguinte forma.

A quantidade de permutações circulares de um conjuntos com n objetos (distintos) é o número de maneiras de colocá-los ao redor de um círculo, de forma que disposições que coincidam pela aplicação de uma rotação sejam consideradas iguais. O número de permutações circulares de n objetos é igual a:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Figura 2: a primeira rotação, no sentido horário, de uma dada configuração.



Exemplo 1. *De quantas maneiras podemos organizar uma roda com 4 crianças?*

Solução. Temos uma aplicação direta do que vimos anteriormente. A resposta é o número de permutações circulares de 4 elementos, que é igual a $(4-1)! = 3! = 6$. □

O restante dessa aula será dedicado à realização de exemplos mais elaborados, onde outras restrições são adicionadas à forma em que podemos distribuir os objetos.

Exemplo 2. *De quantos modos podemos posicionar 6 pessoas em uma roda, dentre elas João e Maria, de modo que João e Maria fiquem lado a lado?*

Solução. Como João e Maria devem ficar sempre juntos, podemos pensar como se eles fossem uma única pessoa. Dessa forma, contamos o número de maneiras de distribuir apenas 5 objetos em torno da roda. O número de maneiras de fazer isso é $PC_5 = (5-1)! = 5! = 24$. Agora, para cada uma dessas maneiras, temos que substituir o bloco pelo casal João e Maria. Como João pode ficar à esquerda ou à direita de Maria, há duas maneiras de fazermos isso. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras de posicionar as 6 pessoas satisfazendo as condições do problema é igual a $24 \cdot 2 = 48$. □

Exemplo 3. *De quantos modos podemos formar uma roda com 8 pessoas, contendo as pessoas A, B e C, de modo que:*

(a) As pessoas A, B e C fiquem juntas?

(b) As pessoas A, B e C fiquem juntas e B fique entre A e C?

Solução.

(a) Vamos considerar que $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ é nosso conjunto de pessoas. Do mesmo modo que no exemplo anterior, como A, B e C devem ficar juntas, podemos representar o bloco formado por essas três pessoas por um único símbolo, digamos P. Dessa forma, primeiro contamos o número de permutações circulares do conjunto $\{P, D, E, F, G, H\}$, que é igual a $(6-1)! = 5! = 120$. Agora, para cada uma dessas 120 possibilidades, temos $3! = 6$ maneiras de substituir a letra P por uma permutação das letras A, B, C. Logo, pelo princípio multiplicativo, a quantidade total de modos de montar a roda desejada é igual a $120 \cdot 6 = 720$.

(b) Sejam $A, B, \ldots, H$ e P definidos como no item anterior. Novamente, temos 120 maneiras de organizar $\{P, D, E, F, G, H\}$ em torno do círculo. Mas agora, já que B deve ficar entre A e C, só temos duas maneiras de substituir P: ou o substituímos pela sequência ABC, ou pela sequência CBA. Logo, o total de modos de formar a roda é igual a $120 \cdot 2 = 240$.

□

Exemplo 4. *Queremos formar uma roda com 5 meninos e 5 meninas, de modo que meninos e meninas sejam colocados em posições alternadas.*

(a) De quantos modos é possível fazer isso?

(b) Se João e Maria estão no grupo, em quantos desses modos João e Maria não ficam juntos?

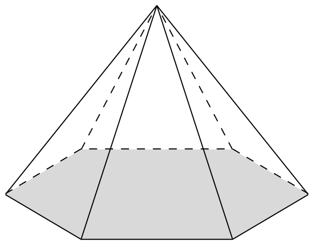
Solução.

(a) Primeiramente vamos definir as posições relativas dos meninos, uns com os outros. A quantidade de maneiras de distribuir os 5 meninos em torno de um círculo é $PC_5 = 4! = 24$. Feito isso, temos 5 posições vazias entre um menino e outro. Cada uma dessas posições deve ser ocupada por exatamente uma menina, uma vez que meninos e meninas devem alternar-se no círculo. Veja que, uma vez que os meninos já estão na roda, já temos pontos de referência para a distribuição das meninas. Assim, o número de maneiras de distribuir as 5 meninas nessas 5 posições é igual a $5! = 120$. Portanto, o total de maneiras de formar a roda desejada é $4! \cdot 5! = 2880$.

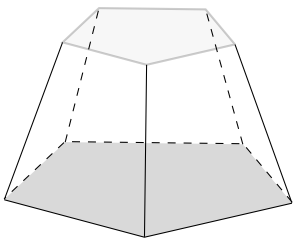
(b) Novamente, temos $4! = 24$ maneiras de distribuir os meninos. Dada uma desses distribuições, observamos as cincos posições que podem ser ocupadas pelas meninas. Como Maria é a menina que mais possui restrições, iremos alocá-la primeiro. Como ela não pode ficar nas duas posições vizinhas a João, há apenas 3 possíveis lugares onde ela pode ser colocada. As demais 4 meninas podem ser distribuídas livremente entre as 4 posições restantes, o que pode ser feito de 4! maneiras. Logo, o total de maneiras de formar a roda é igual a: $4! \cdot 3 \cdot 4! = 1728$.

□

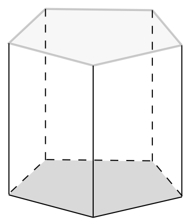
Exemplo 5. *Para cada um dos sólidos da Figura 3, calcule o número de maneiras em que podemos colorir suas faces usando um conjunto de 7 cores, de modo que cada*



(a) Pirâmide hexagonal.



(b) Tronco de pirâmide pentagonal.



(c) Prisma pentagonal.

Figura 3: sólidos.

face receba uma cor diferente. Em cada caso, assuma que os polígonos que determinam as bases dos sólidos são regulares, e que as faces laterais *são triângulos isósceles (no caso da pirâmide hexagonal), trapézios isósceles (no caso do tronco de pirâmide pentagonal) e retângulos (no caso do prisma pentagonal).*

Solução. Observe que cada um dos sólidos possui exatamente 7 faces. Como cada face deve receber uma cor diferente, concluímos que cada cor deve ser usada exatamente uma vez.

(a) No caso da pirâmide, devemos inicialmente escolher uma cor para colorir sua base. Isso pode ser feito de 7 maneiras diferentes, já que qualquer uma das cores pode ser usada. Resta, agora, colorir as faces laterais. Como a base da pirâmide é regular, uma forma de pintar as faces laterais é indistinguível de outra que seja obtida rotacionando-se a base. Sendo assim, o número de maneiras diferentes de pintar as faces laterais é $PC_6 = 5! = 120$. Logo, o total de maneiras de pintar a pirâmide é, pelo princípio multiplicativo, igual a $7 \cdot 120 = 840$.

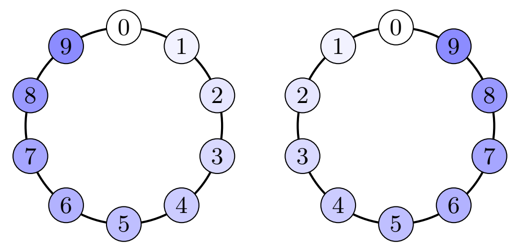
(b) Como no item anterior, iremos primeiro escolher a cor que será usada na base inferior e, em seguida, aquela que será usada na base superior. Como as bases possuem tamanhos diferentes, a ordem em que escolheremos essas duas cores é relevante. Logo, isso pode ser feito de $7 \cdot 6 = 42$ maneiras. Também como antes, o número de maneiras de colorir as faces laterais é o número de permutações circulares do conjunto das (cinco) cores restantes, ou seja, $PC_5 = 4! = 24$. Logo (e novamente pelo princípio multiplicativo), o total de maneiras de colorir o tronco é igual a $42 \cdot 24 = 1008$.

(c) Nesse caso, o tamanho da base inferior é igual ao da base superior. Assim, a ordem em que escolheremos as duas cores que serão usadas nas bases não é relevante. Portanto, o número de maneiras de escolher tais cores passa a ser $\binom{7}{2} = 7 \cdot 6/2 = 21$. Para terminar, veja que, como antes, o número de maneiras de colorir as faces laterais com as demais 5 cores é $4! = 24$. Logo, o total de maneiras de colorir o prisma é $21 \cdot 24 = 504$.

□

Exemplo 6. *Usando n contas de n cores diferentes, quantos colares distintos e sem fecho podem ser montados?*

Solução. O fato de o colar não possuir fecho quer dizer que ele pode ser rotacionado livremente no pescoço. Logo, temos um problema que envolve permutações circulares, o qual nos gera, a princípio, $(n-1)!$ maneiras de ordenar as contas no colar. Contudo, veja que o colar também pode ser *virado*, ou seja, ele pode ser colocado no pescoço de duas formas. Por exemplo, os dois colares da figura abaixo devem ser considerados iguais.



Mais geralmente que a figura acima, podemos agrupar as $(n-1)!$ maneiras de distribuir as contas em torno do círculo em pares, tais que, em cada par, uma das configurações seja o reverso da outra. Sendo assim, o número total de colares distintos é igual a $(n-1)!/2$. □

Exemplo 7. *Queremos organizar uma roda com cinco casais, de modo que cada marido fique ao lado de sua esposa. De quantos modos podemos fazer isso? E se adicionarmos a restrição de que pessoas do mesmo sexo não fiquem em posições vizinhas?*

Solução. Como cada casal deve ficar junto, vamos começar usando apenas uma letra para representar cada um deles. Sejam $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ os casais. Primeiramente, vamos distribuir as letras C_i em volta de um círculo, definindo uma ordem relativa entre os casais na roda. Isso pode ser feito de $(5-1) = 4!$ maneiras. Um vez definida a ordem entre os casais, precisamos substituir cada casal pelo par marido - esposa a ele correspondente. Para cada casal, isso pode ser feito de duas maneiras distintas, uma vez que cada marido pode ficar à esquerda ou à direita de sua esposa. (Veja que cada uma dessas substituições determina uma configuração diferente de pessoas em volta da roda.) Logo, o total de maneiras de distribuir as pessoas é igual a $4! \cdot 2^5 = 768$.

Agora, considere o caso em que pessoas do mesmo sexo não podem ocupar posições vizinhas. Como no caso anterior, temos 24 maneiras de determinar as posições relativas dos casais. Fixe uma dessas configurações. Para o restante, só teremos a liberdade de escolher a posição de um dos maridos com relação à sua esposa. De fato, se o marido do casal C_1 ficar à esquerda de sua esposa, todos os maridos deverão ficar à esquerda de suas respectivas esposas, para que não aconteça de termos duas pessoas do mesmo sexo vizinhas. Assim, o total de maneiras de organizar a roda é apenas $4! \cdot 2 = 48$. □

Exemplo 8. *Cinco mulheres e seis homens devem ser distribuídos nas onze cadeiras de uma mesa redonda, de modo que as mulheres sentem-se em posições consecutivas. A posição absoluta das cadeiras não é importante, ou seja, apenas a posição relativa entre as pessoas interessa. De quantos modos esse distribuição pode ser feita?*

Solução. Vamos numerar as cadeiras em torno da mesa com os números de 1 a 11, nessa ordem. Podemos assumir, sem perda da generalidade, que as cadeiras de 1 a 5 serão ocupadas pelas mulheres e as cadeiras de 6 a 11 pelos homens. Uma vez escolhida essa orientação, temos 5! maneiras de permutar as cinco mulheres entre suas cadeiras e 6! maneiras de permutar os homens. Sendo assim, o total de maneiras de distribuir as pessoas nas cadeiras é igual a $5! \cdot 6! = 86.400$. Note que, aqui, não há necessidade de dividir o resultado por 11, pois, *a priori*, já não estamos considerando os casos em que as mulheres ocupam as outras 11 sequências de 5 cadeiras consecutivas (ou seja, os casos em que elas ocupam as cadeiras 2 a 6, ou as cadeiras 3 a 7 etc). □

Exemplo 9. *Uma roda gigante possui 6 bancos de 2 lugares cada um. De quantas maneiras podemos distribuir 12 crianças nesses lugares.*

Solução. Considere a numeração dos lugares da roda gigante, conforme indicado na Figura 4.

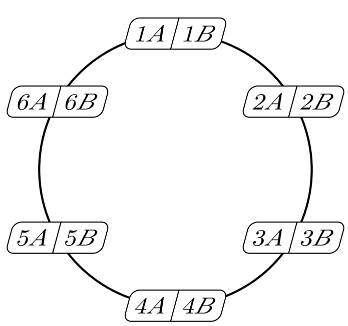


Figura 4: crianças na roda gigante.

Vamos nomear as crianças de $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$. Usaremos, aqui, a mesma técnica utilizada no início dessa aula para calcular o valor de PC_n. Começando com a roda gigante vazia, vamos escolher primeiro uma posição para colocar C_1. Como a roda gigante pode girar, não é relevante em qual dos 6 bancos essa criança será colocada. Podemos, então, assumir que ela será colocada no banco 1. Contudo, precisamos decidir em qual lugar do banco 1 ela será colocada. Há duas opções, o lugar da esquerda ou o da direita do banco (representados por $1A$ e $1B$, na figura 4). Uma vez feita essa escolha, teremos criado um ponto de referência e precisaremos somente distribuir todas as demais 11 crianças entre os 11 lugares restantes. Assim, todas as 11! maneiras de fazer essa distribuição serão distintas, de forma que o total de maneiras de distribuir todas as crianças nos lugares é igual a $2 \cdot 11!$. □

Dicas para o Professor

Ao trabalhar com permutações circulares, é muito comum contar repetidas vezes uma configuração que deveria ter sido contada apenas uma vez. Para que isso não aconteça, o professor e o aluno devem ficar atentos para as simetrias que existem no problema. Caso perceba-se que existem configurações sendo contadas múltiplas vezes, deve-se tentar determinar se é possível dividir o número de configurações obtidas por um valor fixo. Lembre-se de que só podemos fazer isso quando é possível organizar as configurações em grupos (de configurações equivalentes), com exatamente a mesma quantidade de elementos em cada grupo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, Rio de Janeiro, 2000.