Material Teórico - Módulo Cônicas

Hipérboles

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

Já vimos que as hipérboles são as curvas planas obtidas como seções de um cone por planos que intersectam ambas as folhas do cone (veja a figura da primeira aula deste módulo). Entretanto, apresentamos agora tais curvas de uma maneira diferente[1].

Assim como as elipses que não são círculos, as hipérboles possuem dois focos distintos, que chamaremos aqui de F_1 e F_2. Tendo escolhido os pontos F_1 e F_2, fixamos também um número real positivo L, menor do que a distância entre F_1 e F_2. Feito isso, temos que:

> Uma **hipérbole** de **focos** F_1 e F_2 é o conjunto de pontos P do plano tais que o valor absoluto da diferença entre as distâncias de P a F_1 e a F_2 é uma constante, digamos igual ao número L escolhido.

Ao longo desta aula, se P e Q são pontos no plano, denotaremos por $\overline{PQ}$ o comprimento do segmento PQ.

Veja que, enquanto na hipérbole é o valor de $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right|$ que é constante, nas elipses olhávamos para a soma $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$. Apesar de que elipses e hipérboles possuem definições e formas bem distintas, elas ainda possuem várias elementos em comum. Destacamos, abaixo, alguns dos *elementos principais* de uma hipérbole (veja a Figura 1).

Focos: os pontos F_1 e F_2.

Distância focal: a distância entre F_1 e F_2, que será denotada por $2c$. Assim, $2c = \overline{F_1F_2}$.

Centro: o ponto médio do segmento F_1F_2, denotado por C. Veja então que $\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$.

Reta focal: a reta que passa pelos focos.

Vértices: os pontos A_1, A_2 que estão na intersecção da hipérbole com a reta focal. Naturalmente, dentre eles, tomamos A_1 como o ponto mais próximo de F_1 e A_2 como o mais próximo de F_2. (É fácil ver que tais pontos existem, desde que $L \leq 2c$).

Eixo real (ou eixo transverso): o segmento A_1A_2. Vamos denotar seu comprimento por $2a$. Assim, $2a = \overline{A_1A_2}$.

Pela definição de hipérbole, o número L que havíamos escolhido no início desta aula satisfaz $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = L$ para todo ponto P nesta curva. Veja que, se soubermos qual dos segmentos $\overline{PF_1}$ ou $\overline{PF_2}$ é o maior, podemos nos livrar do módulo e fazer apenas a diferença entre o maior e o menor deles. Então, podemos mostrar facilmente que $L = 2a$: como A_1 e A_2 são pontos da hipérbole, observando que $\overline{A_1F_2} > \overline{A_1F_1}$ e $\overline{A_2F_1} > \overline{A_2F_2}$, temos:

$$\overline{A_1F_2} - \overline{A_1F_1} = L,$$
$$\overline{A_2F_1} - \overline{A_2F_2} = L.$$

Somando membro a membro as duas igualdades acima, temos que

$$\overline{A_1F_2} - \overline{A_1F_1} + \overline{A_2F_1} - \overline{A_2F_2} = 2L.$$

Mas, pela Figura 1, podemos ver que $\overline{A_1F_2} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2F_2}$ e $\overline{A_2F_1} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_1F_1}$. Substituindo esses valores na equação acima, obtemos que:

$$2 \cdot \overline{A_1A_2} = 2L.$$

Logo, $\overline{A_1A_2} = L$ e $2a = L$. Com o mesmo tipo de raciocínio, podemos concluir também que $\overline{A_1C} = \overline{A_2C}$. Logo, $\overline{A_1C} = \overline{A_2C} = a$. Temos então que, para todo ponto P pertencente à hipérbole, vale:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a.$$

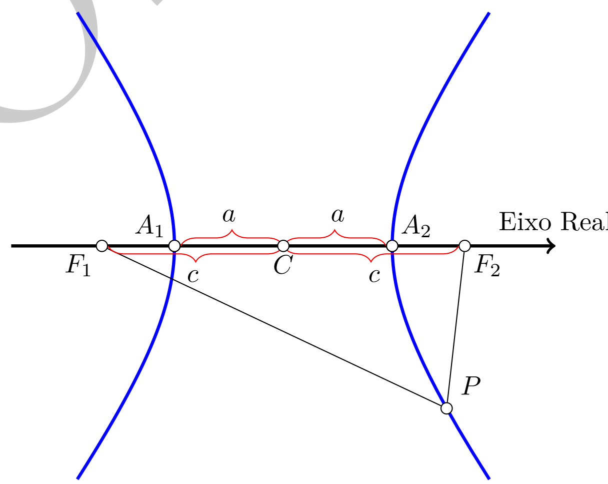

Figura 1: uma hipérbole e alguns de seus elementos.

Considere, agora, uma elipse com eixo maior $2a_0$ e distância focal $2c_0$, para certos números reais positivos a_0 e c_0, e uma hipérbole que possui eixo real $2a$ e distância focal $2c$. Enquanto na elipse vale a desigualdade $c_0 \leq a_0$ (uma vez que os focos estão no interior do eixo maior), na hipérbole temos a relação oposta: $c > a$. Lembre-se de que, na elipse, temos ainda um terceiro parâmetro b_0 (que é igual à metade do eixo menor) e ele satisfaz $a_0^2 = b_0^2 + c_0^2$. Por outro lado, na hipérbole, uma vez que $c > a$, definimos b como o número real que satisfaz a seguinte igualdade:

[1] A demonstração da equivalência entre as definições da aula anterior e desta está fora do escopo destas notas. Isso é discutido na referência [1] onde o problema análogo para elipses é resolvido em detalhes e o caso da hiperbole é deixado como exercício (com dicas).

Relação fundamental da hipérbole:

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Note que, agora, a parcela c^2 está isolada, e não a parcela a^2.

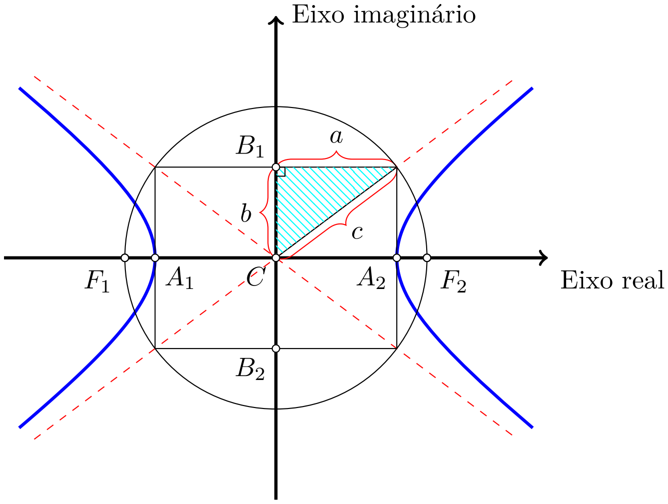

Figura 2: uma hipérbole e a relação $c^2 = a^2 + b^2$.

A inserção da quantidade b nos permitirá definir outro eixo, B_1B_2, na hipérbole, e também nos ajudará a simplificar a fórmula para a equação da hipérbole. Este eixo é definido de forma abstrata, uma vez que ele não contém pontos da hipérbole (veja a Figura 2); por isso ele é chamado de eixo imaginário. Contudo, as assíntotas da hipérbole (veja a definição a seguir) fornecem uma interpretação geométrica para o eixo imaginário.

Podemos, então, definir os seguintes elementos adicionais para uma hipérbole.

Eixo imaginário: o segmento B_1B_2, que é perpendicular ao eixo real A_1A_2, tem comprimento $2b$, onde b satisfaz a equação (1), e ponto médio coincidente com o centro da hipérbole.

Assíntotas: as retas suporte das duas diagonais (veja as retas pontilhadas da Figura 2) do retângulo que possui lados de comprimentos $2a$ e $2b$, paralelos aos eixos, e cujo centro coincide com o da hipérbole.

Na Figura 2, temos ainda um círculo de centro em C e raio c, que portanto passa pelos focos. A relação $c^2 = a^2 + b^2$, juntamente com o teorema de Pitágoras no triangulo hachurado em azul nessa figura, implica que este círculo também passa pelos vértices do retângulo mencionado acima.

Pode ser mostrado que as assíntotas da hipérbole tangenciam essa curva *no infinito*, isto é, aproximam-se mais e mais da hipérbole à medida que as percorremos nos afastando do centro C. Uma vez que as assíntotas são as diagonais do retângulo de bases médias A_1A_2 e B_1B_2, essa é a interpretação geométrica do eixo imaginário, conforme comentamos acima.

2 A equação de uma hipérbole

A fim de deduzir a forma geral da equação de uma hipérbole no plano xOy basta seguirmos os mesmos passos que fizemos para obter a equação da elipse.

Como antes, vamos considerar apenas o caso em que os eixos da hipérbole são paralelos aos eixos x e y. A equação será dada em função da posição do centro da hipérbole e dos parâmetros a e b. Também como antes, vamos começar com o caso mais simples em que o centro C da hipérbole é o ponto $(0,0)$ e os focos, F_1 e F_2, estão sobre o eixo-x.

Como $\overline{F_1F_2} = 2c$ e $(0,0)$ é o ponto médio de F_1F_2 segue que $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Seja $P = (x,y)$ um ponto qualquer da hipérbole. Lembrando da fórmula da distância entre dois pontos, a relação $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ pode ser traduzida para:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a. \qquad (2)$$

Temos então que:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

onde o símbolo $\pm$ indica que o lado direito da equação pode ser igual a $2a$ ou a $-2a$. Recomendamos que o leitor refaça os passos seguintes tratando estes dois casos separadamente (ou seja, tratando individualmente o caso que o sinal é $+$ e o outro em que ele é $-$). Aqui, faremos ambos de forma simultânea com o sinal $\pm$, para manter o texto sucinto.

Continuaremos seguindo o que fizemos para a elipse: para eliminar os radicais, vamos mover um deles para o outro lado da equação e depois elevar ambos os lados ao quadrado. Simplificando a expressão, passo a passo temos as seguintes expressões equivalentes:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + \cancel{y^2} &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + ((x-c)^2 + \cancel{y^2}) \\
(x+c)^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 \\
\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} \\
2cx &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx \\
4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados da última igualdade, o sinal de $\pm$ irá desaparecer, já que

$(\pm 1)^2 = 1$. Então, obtemos sucessivamente as equações equivalentes:

$$\begin{aligned} (cx - a^2)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\ c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 &= a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\ c^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2. \end{aligned}$$

Isolando as variáveis x e y, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Usando o fato de que $c^2 = a^2 + b^2$, podemos simplificar a expressão acima para

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Por fim, dividindo ambos os lados por a^2b^2 obtemos o seguinte:

> A equação de uma hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo-x é:
>
> $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Lembre-se de que, para obter a equação acima, começamos assumindo que os focos estão sobre o eixo-x, ou seja, que o eixo real está sobre o eixo-x. No caso em que os focos da hipérbole estejam sobre o eixo-y (veja a Figura 3), digamos com $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, a expressão $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ será traduzida para:

$$\left|\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}\right| = 2a.$$

Veja que a equação acima pode ser obtida permutando-se as variáveis x e y na equação (2). Sendo assim, ao realizarmos os cálculos análogos aos acima, a equação resultante será semelhante à equação (3) apenas com os papéis de x e y também invertidos:

> A equação de uma hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo-y é:
>
> $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Exemplo 1. *Os pontos* $(3, 0)$ *e* $(-3, 0)$ *são vértices de uma hipérbole cujos focos são* $(4, 0)$ *e* $(-4, 0)$. *Encontre a equação da mesma.*

Solução. Como os focos estão sobre o eixo-x, temos uma equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ademais, os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ serão as extremidades do eixo real, de forma que o comprimento de tal eixo é

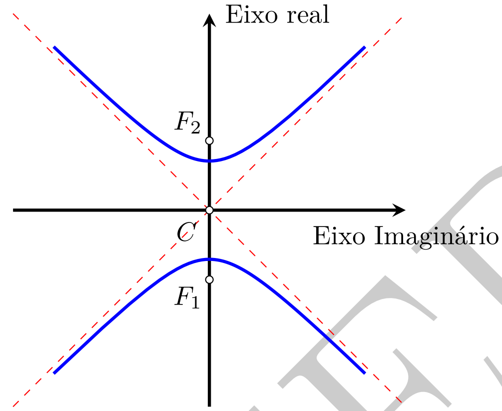

Figura 3: hipérbole com focos sobre o eixo-y.

$3 - (-3) = 6$. Logo, $2a = 6 \implies a = 3$. A distância entres os focos é $2c = 4 - (-4) = 8$ e, assim, $c = 4$. Por fim, como $c^2 = a^2 + b^2$, segue que

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 3^2 = 7.$$

Então, a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

□

Exemplo 2. *Obtenha a equação de uma elipse, sabendo que dois de seus vértices são os pontos* $(0, 4)$ *e* $(0, -4)$ *e que seus focos são os pontos* $(0, 6)$ *e* $(0, -6)$.

Demonstração. Desta vez os focos encontram-se sobre o eixo-y, de maneira que a equação procurada é da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Agora, o comprimento do eixo real é dado pela distância entre os vértices, que é $2a = 4 - (-4) = 8$. Assim, $a = 4$. De forma análoga, temos que $c = 6$ e

$$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 4^2 = 20.$$

Logo, a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

□

Suponha, agora, que queremos uma hipérbole com centro no ponto $C = (x_0, y_0)$. Ela pode ser obtida fazendo-se uma translação de uma hipérbole que possui centro no ponto $(0, 0)$. Algebricamente, isso corresponde a uma *substituição de variáveis*, onde trocamos x por $x - x_0$ e y por

$y - y_0$ nas equações (3) e (4) (essa mudança faz com que o ponto (x_0, y_0) seja levado no ponto $(0, 0)$).

Desse modo, uma hipérbole que possui centro no ponto (x_0, y_0) e cujo eixo real é paralelo ao eixo-x terá equação da forma

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

De maneira análoga, uma hipérbole que tenha o eixo real paralelo ao eixo-y terá equação

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

2.1 Excentricidade

A **excentricidade** de uma hipérbole é definida como a razão $e = c/a$, onde $2c$ é a distância focal e $2a$ é o comprimento do eixo real, de modo semelhante à excentricidade da elipse. Observando a Figura 2 e a relação fundamental $c^2 = a^2 + b^2$, vemos que $c > a$, o que acarreta $c/a > 1$. Podemos observar ainda que, quanto menor for a excentricidade (ou seja, quanto mais próxima ela for de 1), maior será a *curvatura* da hipérbole. As Figuras 4 e 5 mostram hipérboles com diferentes excentricidades.

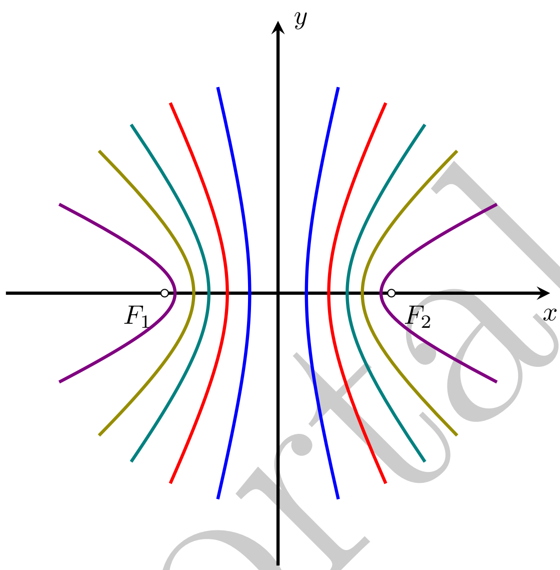

Figura 4: hipérboles com um mesmo par de focos (F_1 e F_2) e excentricidades diferentes, variando de aproximadamente 1,1 (violeta) a 4,0 (azul). Assim, fixamos a distância focal ($2c$) e variamos os comprimentos dos eixos.

3 Exercícios

O exemplo a seguir exercita os conceitos introduzidos na seção anterior.

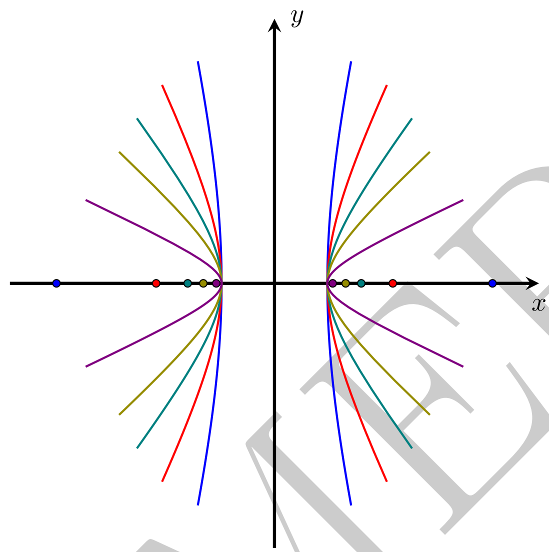

Figura 5: hipérboles que possuem o mesmo eixo real e diferentes excentricidades. Assim, fixamos o parâmetro a e variamos c e b.

Exemplo 3. *Em cada um dos itens abaixo, verifique se a equação dada representa uma hipérbole. Em caso afirmativo, descreva seus principais elementos:*

(a) $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$.

(b) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$.

(c) $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$.

Solução.

(a) Se a equação dada corresponder a uma hipérbole, temos de ser capazes de rearranjar seus termos para que ela fique no formato de (3) ou (4).

Como $9x^2 - 25y^2 = 225$, dividindo ambos os lados por 225 obtemos:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Então, temos uma hipérbole com eixo real sobre o eixo-x, na qual $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$; logo, $a = 5$ e $b = 3$ (uma vez que $a > 0$ e $b > 0$). Usando a relação fundamental (1), segue que

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34,$$

e daí $c = \sqrt{34}$. Assim, o comprimento do eixo real é $\overline{A_1A_2} = 10$, o do eixo imaginário é $\overline{B_1B_2} = 2b = 6$ e a distância focal é $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{34}$. Os vértices são os pontos $A_1 = (-5, 0)$ e $A_2 = (5, 0)$. O centro é o ponto $C = (0, 0)$ e os focos são $F_1 = (-\sqrt{34}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{34}, 0)$.

Por fim, sua excentricidade é $e = c/a = \sqrt{34}/5$, que é aproximadamente 1,16.

(b) Neste item, para deixar a equação no formato adequado à equação de uma hipérbole, vamos precisar separar as variáveis x e y e, em seguida, utilizar a técnicas de completar quadrados para cada uma delas (que estudamos no módulo sobre equações de segundo grau, do nono ano do Ensino Fundamental).

Inicialmente, escrevemos:

$$(x^2 + 6x) - 2(y^2 - 2y) = -9.$$

Em seguida, completamos quadrados no termo $x^2 + 6x$, quer dizer, o reescrevemos como:

$$x^2 + 6x = x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 = (x + 3)^2 - 9.$$

Fazendo o análogo com $y^2 - 2y$, temos:

$$y^2 - 2y = y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = (y - 1)^2 - 1.$$

Assim, a equação original equivale a:

$$(x^2 + 3)^2 - 9 - 2\left((y - 1)^2 - 1\right) = -9$$

ou, ainda,

$$(x^2 + 3)^2 - 2(y - 1)^2 = -2.$$

Por fim, dividindo ambos os lados dessa última igualdade por -2, temos:

$$\frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(x^2+3)^2}{2} = 1.$$

Interpretando essa equação, vemos que se trata de uma hipérbole com centro em $C = (-3, 1)$. Temos ainda $a^2 = 1$, logo $a = 1$, e $b^2 = 2$, logo $b = \sqrt{2}$. Usando a relação fundamental, temos que, $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 2 = 3$; logo, $c = \sqrt{3}$. Veja que o eixo real dessa hipérbole é paralelo ao eixo-y (veja a Figura 6). As coordenadas dos vértices podem ser obtidas a partir de C, somando-se ou subtraindo-se o valor de a à coordenada y de C: $A_1 = (-3, 1 + 1) = (-3, 2)$ e $A_2 = (-3, 1 - 1) = (-3, 0)$. De forma análoga, temos que os focos são $F_1 = (-3, 1 + \sqrt{3})$ e $F_2 = (-3, 1 - \sqrt{3})$. Por fim, temos que $B_1 = (-3-\sqrt{2}, 1)$ e $B_2 = (-3+\sqrt{2}, 1)$.

(c) Seguindo a mesma estratégia dos itens anteriores, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
(9x^2 + 90x) - (16y^2 + 128y) &= 31\\
9(x^2 + 10x) - 16(y^2 + 8y) &= 31\\
9(x^2 + 10x + 5^2) - 16(y^2 + 8y + 4^2) &= 31 + 9 \cdot 5^2 - 16 \cdot 4^2\\
9(x + 5)^2 - 16(y + 4)^2 &= 31 + 225 - 256\\
9(x + 5)^2 - 16(y + 4)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Veja que não é possível fazer com que a equação acima fique no formato da equação de uma hipérbole. Realmente, na equação de uma hipérbole, o valor do lado direito da

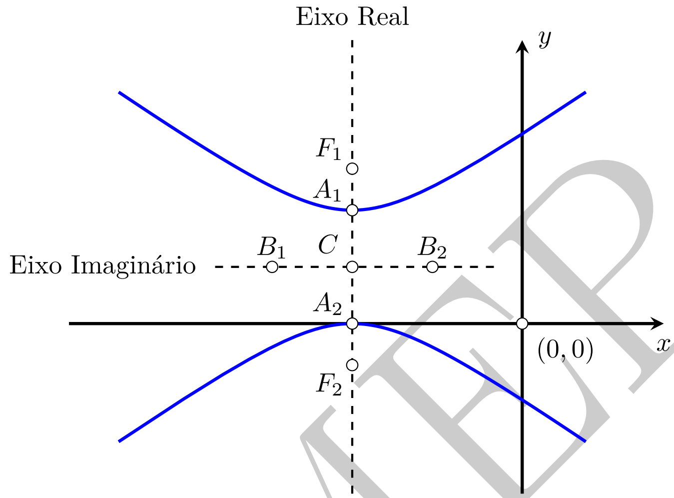

Figura 6: hipérbole de equação $\frac{(y-1)^2}{1} - \frac{(x^2+3)^2}{2} = 1$.

equação deveria ser diferente de zero, para que pudéssemos dividir ambos os lados por tal valor e obter 1 do lado direito.

Em todo caso, vamos proseguir resolvendo a equação para saber o que podemos obter. Temos que:

$$\begin{aligned}
9(x + 5)^2 = 16(y + 4)^2 &\iff\\
(y + 4)^2 = \frac{9}{16} \cdot (x + 5)^2 &\iff\\
(y + 4) = \pm\frac{3}{4} \cdot (x + 5).&
\end{aligned}$$

Assim, há duas possibilidades para que um ponto (x, y) satisfaça a equação original: $(y+4) = \frac{3}{4}\cdot(x+5)$ ou $(y+4) = -\frac{3}{4} \cdot (x + 5)$. Isso é o mesmo que

$$y = -4 + \frac{3}{4} \cdot (x + 5) = \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$$

ou

$$y = -4 - \frac{3}{4} \cdot (x + 5) = \frac{-3x}{4} - \frac{31}{4}.$$

e o conjunto-solução de cada equação acima forma uma reta no plano xOy. Estas retas possuem coeficientes angulares diferentes e, portanto, são concorrentes. Logo, as soluções da equação original pertencem à união dessas duas retas concorrentes. $\square$

Dicas para o Professor

Este material pode ser apresentado em dois encontros de 50 minutos cada. Assim como na aula anterior, não é estritamente necessário provar que toda hipérbole, conforme definida neste material, é uma seção cônica. Mas este é um ponto interessante e, havendo tempo, a apresentação da demonstração constante da referência [1] pode ser objeto de um terceiro encontro. Observamos ainda que as técnicas usadas aqui são muito semelhantes às técnicas da aula sobre elipses. Contudo, há que se tomar bastante cuidado ao interpretar os resultados, uma vez que os parâmetros a, b e c se relacionam de forma diferente. A referência [2] contém mais exercícios similares ao resolvido acima, e outros tantos mais difíceis.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria.* Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 7: Geometria analítica.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.