

**Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões  
Algébricas**

**Produtos Notáveis**

**Oitavo Ano**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**  
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



Uma identidade algébrica é uma equação em que os dois membros são expressões algébricas e que é verdadeira se, e somente se, a igualdade é verdadeira para quaisquer valores que se atribua às variáveis envolvidas.

**Produtos notáveis** são identidades algébricas que merecem ser destacadas por conta da grande frequência com que aparecem quando operamos com expressões algébricas.

## 1 Quadrado da soma e quadrado da diferença de dois termos

Utilizando as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x + y)(x + y) \\ &= x(x + y) + y(x + y) \\ &= (x^2 + xy) + (yx + y^2) \\ &= x^2 + 2xy + y^2,\end{aligned}$$

em que  $x$  e  $y$  são números reais quaisquer.

Fórmula para o quadrado da soma de dois termos:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Podemos interpretar geometricamente a fórmula para o quadrado da soma de dois termos desenhando um quadrado de lado  $x + y$ . Então, a área desse quadrado, que é igual a  $(x + y)^2$ , será dada também pela soma das áreas dos dois quadrados menores e dos dois retângulos que formam o quadrado maior de lado  $x + y$  (veja figura 1). Obtemos, assim,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

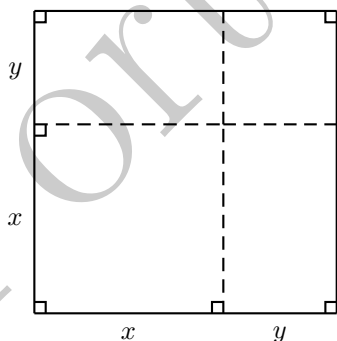


Figura 1: Quadrado da soma de dois termos.

**Exemplo 1.** Desenvolvendo o quadrado  $(a + 2b)^2$ , obtemos:

$$\begin{aligned}(a + 2b)^2 &= a^2 + 2a \cdot 2b + (2b)^2 \\ &= a^2 + 4ab + 4b^2.\end{aligned}$$

Observe que, nos cálculos acima, o que fizemos foi substituir, na fórmula para  $(x + y)^2$ ,  $x$  por  $a$  e  $y$  por  $2b$ .

**Exemplo 2.** Se  $x$  é um número real tal que  $x + \frac{1}{x} = 7$ , calcule o valor de  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

**Solução.** Utilizando a fórmula para  $(x + y)^2$ , com  $\frac{1}{x}$  no lugar de  $y$ , obtemos

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} = 7 &\implies \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7^2 \\ &\implies x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 49 \\ &\implies x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 49 \\ &\implies x^2 + \frac{1}{x^2} = 49 - 2 = 47.\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3 (OCM).** Existem inteiros positivos  $a$  e  $b$  tais que  $\frac{a^2 + a}{b^2 + b} = 4$ ?

**Solução.** Suponhamos a existência de inteiros positivos  $a$  e  $b$  satisfazendo  $\frac{a^2 + a}{b^2 + b} = 4$ . Então, temos

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + a}{b^2 + b} = 4 &\implies a^2 + a = 4b^2 + 4b \\ &\implies a^2 + a + 1 = (2b)^2 + 2 \cdot 2b \cdot 1 + 1^2 \\ &\implies a^2 + a + 1 = (2b + 1)^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}a^2 < a^2 + a + 1 < a^2 + 2a + 1 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2 = (a + 1)^2.\end{aligned}$$

Portanto,  $a^2 + a + 1$  não pode ser o quadrado de um número inteiro, pois encontra-se entre dois quadrados consecutivos.

Como chegamos a uma contradição, concluímos que a única possibilidade é que não existem tais inteiros  $a$  e  $b$ . □

Agora, utilizando a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, obtemos

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= [x + (-y)]^2 \\ &= x^2 + 2x \cdot (-y) + (-y)^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2,\end{aligned}$$

em que  $x$  e  $y$  são números reais quaisquer.

Fórmula para o quadrado da diferença de dois termos:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Também podemos interpretar geometricamente a fórmula para o quadrado da diferença de dois termos. Neste caso, desenhamos um quadrado de lado  $x$  e, dentro dele, um quadrado de lado  $x - y$ , um retângulo de lados  $x - y$  e  $y$ , e um quadrado de lado  $y$  (veja a figura 2). Então, a área do quadrado maior, que por um lado vale  $x^2$ , também é dada pela soma  $(x - y)^2 + 2y(x - y) + y^2$ , ou seja,

$$x^2 = (x - y)^2 + 2xy - 2y^2 + y^2.$$

Logo,

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

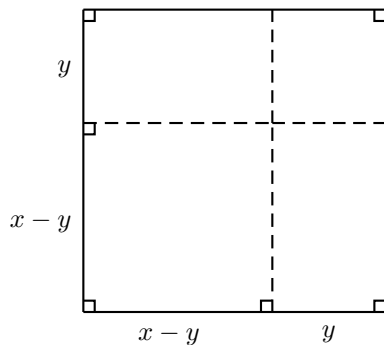


Figura 2: Quadrado da diferença de dois termos.

**Exemplo 4.** Desenvolvendo o quadrado  $(p^2 - 3q)^2$ , com o auxílio da fórmula para o quadrado da diferença entre dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned} (p^2 - 3q)^2 &= (p^2)^2 - 2p^2 \cdot 3q + (3q)^2 \\ &= p^4 - 6p^2q + 9q^2. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.** Sejam  $a$  e  $b$  números racionais positivos, tais que  $\sqrt{ab}$  é irracional. Mostre que a diferença  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  também é irracional.

**Solução.** Primeiramente, observe que o quadrado de um número racional é ainda racional. Por contradição, suponhamos que  $d = \sqrt{a} - \sqrt{b}$  seja racional. Então,  $d^2$  também o será (uma vez que  $d^2$  será representado pela fração cujos numerador e denominador são, respectivamente, iguais aos quadrados do numerador e do denominador da fração que representa  $d$ ).

Utilizando novamente a fórmula para o quadrado da diferença entre dois termos, obtemos:

$$d^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b,$$

ou seja,

$$\sqrt{ab} = \frac{a + b - d^2}{2}.$$

Essa última igualdade, por suavéz, acarreta que  $\sqrt{ab}$  é racional, pois é dado por uma fração com numerador e denominador racionais. Mas isso contradiz o fato, assumido como hipótese, de que  $\sqrt{ab}$  é irracional. Concluímos, pois, que  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  é irracional.  $\square$

## 2 Quadrado da soma de três termos

Utilizando duas vezes a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \\ &= (x^2 + 2xy + y^2) + (2xz + 2yz) + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz). \end{aligned}$$

Também é possível interpretar geometricamente o quadrado da soma de três termos. Na figura 3, o quadrado maior, de lado  $x + y + z$ , tem área dada pela soma das áreas dos quadrados e retângulos que o compõem. São dois retângulos de área  $xy$ , dois de área  $xz$  e dois de área  $yz$ , além dos três quadrados menores, de áreas  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$ . Então, vê-se facilmente que

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz).$$

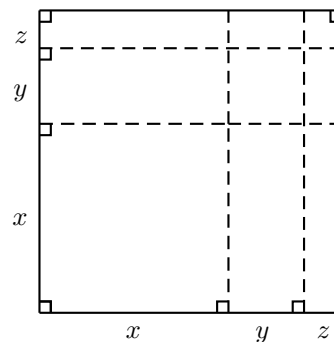


Figura 3: Quadrado da soma de três termos.

Fórmula para o quadrado da soma de três termos:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz).$$

**Exemplo 6.** Desenvolvendo a expressão  $(x^2 + 2y + z^3)^2$  com o auxílio da fórmula anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}(x^2 + 2y + z^3)^2 &= (x^2)^2 + (2y)^2 + (z^3)^2 \\ &\quad + 2[x^2 \cdot 2y + x^2 z^3 + 2yz^3] \\ &= x^4 + 4y^2 + z^6 + 4x^2 y + 2x^2 z^3 + 4yz^3.\end{aligned}$$

### 3 Produto da soma pela diferença

Utilizando novamente as propriedades das operações aritméticas de números reais listadas anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned}(x + y)(x - y) &= x(x - y) + y(x - y) \\ &= (x^2 - xy) + (yx - y^2) \\ &= x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - y^2 \\ &= x^2 - y^2,\end{aligned}$$

em que  $x$  e  $y$  são números reais quaisquer. Então, temos:

Fórmula para o produto da soma pela diferença de dois termos:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

**Exemplo 7 (OBMEP - 2009).** Qual o valor da diferença  $5353^2 - 2828^2$ ?

- (a)  $2525^2$ .
- (b)  $3535^2$ .
- (c)  $4545^2$ .
- (d)  $4565^2$ .
- (e)  $5335^2$ .

**Solução.** Veja que  $5353 = 53 \cdot 101$  e  $2828 = 28 \cdot 101$ . Daí, aplicando a fórmula para o produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned}5353^2 - 2828^2 &= 53^2 \cdot 101^2 - 28^2 \cdot 101^2 \\ &= (53^2 - 28^2) \cdot 101^2 \\ &= (53 + 28) \cdot (53 - 28) \cdot 101^2 \\ &= 81 \cdot 25 \cdot 101^2 = 9^2 \cdot 5^2 \cdot 101^2 \\ &= (9 \cdot 5 \cdot 101)^2 = 4545^2.\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é o item c. □

**Exemplo 8.** Detremine o quociente da divisão de  $x^{16} - 1$  por  $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)$ .

**Demonstração.** Aplicando a fórmula para o produto da soma pela diferença algumas vezes, temos:

$$\begin{aligned}x^{16} - 1 &= x^{16} - 1^{16} = (x^8 - 1^8)(x^8 + 1^8) \\ &= (x^4 - 1^4)(x^4 + 1^4)(x^8 + 1) \\ &= (x^2 - 1^2)(x^2 + 1^2)(x^4 + 1)(x^8 + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1).\end{aligned}$$

Portanto, o quociente da divisão de  $x^{16} - 1$  por  $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)$  é  $x - 1$ . □

**Exemplo 9 (EUA).** Se  $x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20$ , determine o valor de

$$x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}}.$$

**Demonstração.** Observe que

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2 \\ &= x^2 - (x^2 - 1) \\ &= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1 = 1.\end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} &= 20 \\ \implies 2(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= 20 \\ \implies x + \sqrt{x^2 - 1} &= 10 \\ \implies \sqrt{x^2 - 1} &= 10 - x \\ \implies (\sqrt{x^2 - 1})^2 &= (10 - x)^2 \\ \implies \cancel{x^2} - 1 &= 100 - 20x + \cancel{x^2} \\ \implies 20x &= 101 \implies x = \frac{101}{20}.\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}(x^2 + \sqrt{x^4 - 1})(x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) &= (x^2)^2 - (\sqrt{x^4 - 1})^2 \\ &= x^4 - (x^4 - 1) \\ &= \cancel{x^4} - \cancel{x^4} + 1,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} = x^2 - \sqrt{x^4 - 1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} & x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4 - 1}} \\ &= x^2 + \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} + x^2 - \sqrt{x^4 - 1} \\ &= 2x^2 = 2 \cdot \left(\frac{101}{20}\right)^2 = 2 \cdot \frac{101^2}{20^2} = 2 \cdot \frac{10201}{400} = \frac{10201}{200}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 10.** Simplifique a expressão

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}) \\ & \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7}) \cdot (-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}). \end{aligned}$$

**Solução.** Utilizando as fórmulas para o quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}) \\ & \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7}) \cdot (-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}) \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}) \\ & \cdot [\sqrt{7} + (\sqrt{5} - \sqrt{6})] \cdot [\sqrt{7} - (\sqrt{5} - \sqrt{6})] \\ &= \left[ (\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{7})^2 \right] \cdot \left[ (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{6})^2 \right] \\ &= [(5 + 2\sqrt{30} + 6) - 7] \cdot [7 - (5 - 2\sqrt{30} + 6)] \\ &= (2\sqrt{30} + 4) \cdot (2\sqrt{30} - 4) \\ &= (2\sqrt{30})^2 - 4^2 = 2^2 \cdot 30 - 16 = 120 - 16 = 104. \end{aligned}$$

□

## 4 Cubo da soma e cubo da diferença de dois termos

Mais uma vez utilizando as propriedades da adição e multiplicação de números reais citadas anteriormente, além da fórmula para o quadrado da soma de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)(x + y)^2 \\ &= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot 2xy + x \cdot y^2 + y \cdot x^2 + y \cdot 2xy + y \cdot y^2 \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \end{aligned}$$

em que  $x$  e  $y$  são números reais quaisquer.

Fórmula para o cubo da soma de dois termos:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Por vezes, utilizaremos a fórmula para o cubo da soma de dois termos da seguinte forma:

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y).$$

**Exemplo 11.** Utilizando a fórmula para o cubo da soma de dois termos podemos expandir a expressão  $(2a^2 + 3b)^3$ . Para tanto, substituímos, na fórmula acima,  $x$  por  $2a^2$  e  $y$  por  $3b$ , obtendo:

$$\begin{aligned} (2a^2 + 3b)^3 &= (2a^2)^3 + 3 \cdot (2a^2)^2 \cdot (3b) \\ &+ 3 \cdot (2a^2) \cdot (3b)^2 + (3b)^3 \\ &= 8a^6 + 3 \cdot 4a^4 \cdot 3b + 3 \cdot 2a^2 \cdot 9b^2 + 27b^3 \\ &= 8a^6 + 36a^4b + 54a^2b^2 + 27b^3. \end{aligned}$$

**Exemplo 12.** Se  $a$  e  $b$  são números reais positivos, mostre que  $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$ .

**Prova.** Utilizando a fórmula para o cubo da soma de dois termos, obtemos

$$\begin{aligned} 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 &\iff 4(a^3 + b^3) \\ &\geq a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \\ &\iff 3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a + b) \\ &\iff a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \\ &\iff a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \\ &\iff a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 &= a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \\ &= a^2(a - b) - b^2(a - b) \\ &= (a^2 - b^2)(a - b) \\ &= (a + b)(a - b)(a - b) \\ &= (a + b)(a - b)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pois  $a + b > 0$  e  $(a - b)^2 \geq 0$ . □

Aplicando a fórmula para o cubo da soma de dois termos a  $(x - y)^3 = (x + (-y))^3$ , obtemos:

$$\begin{aligned} (x - y)^3 &= (x + (-y))^3 \\ &= x^3 + 3x^2(-y) + 3x(-y)^2 + (-y)^3 \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3. \end{aligned}$$

Fórmula para o cubo da diferença de dois termos:

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

**Exemplo 13.** Utilizando a fórmula para o cubo da diferença de dois termos, com  $2x$  no lugar de  $x$  e  $\frac{1}{5}$  no lugar de  $y$ , podemos expandir a expressão  $(2x - \frac{1}{5})^3$ , obtendo:

$$\begin{aligned} \left(2x - \frac{1}{5}\right)^3 &= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \\ &\quad + 3 \cdot (2x) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 \\ &= 8x^3 - \frac{12x^2}{5} + \frac{6x}{25} - \frac{1}{125}. \end{aligned}$$

## 5 Cubo da soma de três termos

Aplicando a fórmula para o cubo da soma de dois termos duas vezes e utilizando as propriedades usuais das operações aritméticas, obtemos:

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 &= [(x + y) + z]^3 \\ &= (x + y)^3 + z^3 + 3(x + y)z[(x + y) + z] \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + z^3 \\ &\quad + 3(x + y)[(x + y)z + z^2] \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)[xy + xz + yz + z^2] \\ &= x^3 + y^3 + z^3 \\ &\quad + 3(x + y)[x(y + z) + z(y + z)] \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z). \end{aligned}$$

Fórmula para o cubo da soma de três termos:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

**Exemplo 14.** Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais que satisfazem  $a + b + c = 0$ , mostre que  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

**Solução.** Observando que  $a + b = -c$ ,  $a + c = -b$  e  $b + c = -a$  e utilizando a fórmula para o cubo da soma de três termos, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c) \\ \implies 0 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(-c)(-b)(-a) \\ \implies 0 &= a^3 + b^3 + c^3 - 3cba \\ \implies a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc. \end{aligned}$$

□

## 6 Soma e diferença de cubos

Mais uma vez fazendo uso das propriedades que as operações aritméticas com números reais satisfazem, obtemos os produtos notáveis abaixo.

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) - (\cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + y^3) \\ &= x^3 - y^3. \end{aligned}$$

Fórmula para a diferença de dois cubos:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

$$\begin{aligned} (x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2}) + (\cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3) \\ &= x^3 + y^3. \end{aligned}$$

Fórmula para a soma de dois cubos:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

**Exemplo 15.** Aplicando a fórmula para a diferença de dois cubos, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 = \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}\right) \left[\left(\sqrt[3]{6}\right)^2 + \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right] \\ &= \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}\right) \left(\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{6 \cdot 5} + \sqrt[3]{5^2}\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}\right) \left(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}\right), \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}.$$

## Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para cada uma das seções 1, 3 e 4, e uma sessão de 50min para as demais seções que compõem esta aula (possivelmente discutindo mais exemplos, os quais podem ser encontrados na bibliografia sugerida). Ao longo de toda a aula, é importante chamar a atenção dos alunos para as propriedades das operações aritméticas que são utilizadas para a dedução da fórmula de cada produto notável. Ressalte também a diferença entre “quadrado da soma” e “soma de quadrados”, “cubo da soma” e “soma de cubos”, etc.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.