

Material Teórico - Módulo de Frações como Porcentagem e Probabilidade

Frações como Probabilidade – Parte 1

Sexto Ano do Ensino Fundamental

**Autores: Prof. Francisco Bruno Holanda e
Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

10 de julho de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Introdução à Probabilidade

Nesta aula, apresentaremos conceitos introdutórios sobre Probabilidade, área da Matemática que se dedica a entender e estudar fenômenos *aleatórios*. Mas o que isso significa?

Nós sabemos que é impossível ter uma bola de cristal para prever o futuro com exatidão. A Matemática formaliza essa intuição chamando de *não determinísticas* situações nas quais é impossível prever com certeza absoluta o que vai acontecer. Por exemplo, ao lançarmos uma moeda *honesta*¹, não sabemos se o resultado será cara ou coroa. Ao lançarmos um dado honesto, não sabemos qual será a face que ficará apontada para cima.

No entanto, em competições de Matemática e na ciência moderna, não precisamos depender apenas de chutes no escuro. A Probabilidade nos permite calcular, com lógica e rigor, o que tem a maior chance de ocorrer, transformando o acaso em uma antecipação inteligente de cenários.

Para organizar as ideias acima, precisamos de dois conceitos essenciais:

- Os possíveis resultados de um experimento são conhecidos como **eventos**. Assim, no experimento *lançar um dado*, alguns dos eventos possíveis que podemos investigar são: face de cima igual a 3, face de cima par, face de cima igual a um número primo, etc.
- O conjunto que reúne todos os possíveis resultados de um experimento é denominado **espaço amostral**. Quando o experimento for o lançamento de um dado uma única vez, o espaço amostral será o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aqui, sempre assumiremos que os espaços amostrais relacionados aos experimentos que discu-

¹Isto é, uma moeda *não viciada*. Uma maneira de criar uma moeda *viciada* é fabricá-la de modo que a liga metálica usada em sua composição tenha densidades diferentes nos dois lados; dessa forma, ao lançarmos a moeda repetidas vezes, o lado com metal mais denso ficará para baixo mais frequentemente. O mesmo procedimento pode ser utilizado com um dado.

tiremos serão conjuntos *finitos*, ou seja, que possuem uma quantidade finita de elementos.

Além dos dois conceitos acima, precisamos da seguinte definição:

Se E for um evento em um espaço amostral A , a **probabilidade de E** é definida por:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#A}, \quad (1)$$

em que $\#X$ denota o número de elementos do conjunto X .

Como um evento é um subconjunto do espaço amostral, a quantidade de elementos de E nunca pode superar a quantidade de elementos de A ; em notação matemática, temos $0 \leq \#E \leq \#A$. Assim, ao dividirmos pela quantidade do espaço amostral, chegamos à restrição fundamental:

$$0 \leq P(E) = \frac{\#E}{\#A} \leq 1.$$

Então, por definição, a probabilidade de um evento sempre deverá ser um número (fração) de 0 a 1, podendo ser reescrita como uma porcentagem entre 0% e 100%.

1.1 Exemplos introdutórios

Nos problemas a seguir, assumiremos (e comentaremos nos enunciados, por ênfase) que os experimentos que discutiremos sempre envolverão dados e moedas honestos. Graças a (1), num dado honesto, a probabilidade da face superior ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 é sempre a mesma, e igual a $\frac{1}{6}$; da mesma forma, numa moeda honesta, as probabilidades de obtermos cara ou coroa são ambas iguais a $\frac{1}{2}$.

Exemplo 1. Considere o experimento de lançar um dado honesto e observar o número estampado em sua face superior. Qual a probabilidade de obtermos um número ímpar?



Solução. O nosso espaço amostral é $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, logo $\#A = 6$. O evento de interesse (a face superior ser número ímpar) é dado pelo subconjunto $E = \{1, 3, 5\}$, portanto $\#E = 3$. Substituindo na fórmula da probabilidade, obtemos:

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a probabilidade do número da face superior ser ímpar é de $\frac{1}{2} = 50\%$. $\square$

Exemplo 2. O pai de Carlos e Felipe comprou uma bicicleta nova para os filhos. Para decidir quem seria o primeiro a dar uma volta no brinquedo novo, Carlos sugeriu ao seu irmão tirar no par ou ímpar. As regras propostas por Carlos são simples: cada um dos irmãos escolhe, ao mesmo tempo, um número de 1 a 5 (inclusive); em seguida, os dois números escolhidos são somados. Caso o resultado seja par, Carlos vence; caso seja ímpar, quem vence é Felipe. Essa é uma forma justa de decidir quem será o primeiro a andar de bicicleta?



Solução. Utilizando o princípio multiplicativo, temos que há um total de 25 possíveis resultados para esse jogo de par ou ímpar, pois cada um dos 5 possíveis números escolhidos por Carlos pode combinar com cada um dos 5 possíveis números escolhidos por Felipe. Podemos organizar esses resultados na seguinte tabela, que já mostra a *paridade* da soma dos dois números escolhidos:

+	1	2	3	4	5
1	P	I	P	I	P
2	I	P	I	P	I
3	P	I	P	I	P
4	I	P	I	P	I
5	P	I	P	I	P

Veja que a opção P (referente a um resultado par) aparece 13 vezes, enquanto a opção I (referente a um resultado ímpar) aparece 12 vezes. Dessa forma, considerando que cada garoto escolhe seu número de forma aleatória e uniforme, a probabilidade do resultado ser par é $\frac{13}{25}$, ao passo que a probabilidade do resultado ser ímpar é $\frac{12}{25}$.

Assim, é mais provável ocorrer um resultado par do que um resultado ímpar, logo, a forma proposta por Carlos não é uma maneira justa de decidir quem usará a bicicleta primeiro! $\square$

Exemplo 3. *Dois dados cúbicos, honestos e iguais são jogados simultaneamente e, em seguida, os resultados são somados. Qual é a soma mais provável de aparecer?*



Solução. Primeiramente, fazemos uma tabela que coleciona todos os $6 \times 6 = 36$ possíveis resultados. Pela tabela, é fácil perceber que a soma que aparecerá mais vezes será o 7, num total de exatamente seis vezes.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Portanto, a probabilidade de 7 ser o resultado final da soma é $\frac{6}{36}$, que pode ser simplificada para a fração equivalente $\frac{1}{6}$. $\square$

Exemplo 4. *Uma moeda honesta é jogada três vezes. Qual a probabilidade de aparecer pelo menos uma cara?*



Solução. Começamos descrevendo o espaço amostral completo, com todos os possíveis resultados que podem ser obtidos ao se jogar uma moeda três vezes:

(Cara, Cara, Cara),
 (Cara, Cara, Coroa),
 (Cara, Coroa, Cara),
 (Cara, Coroa, Coroa),
 (Coroa, Cara, Cara),
 (Coroa, Cara, Coroa),
 (Coroa, Coroa, Cara),
 (Coroa, Coroa, Coroa).

Dessa forma, o espaço amostral tem 8 possíveis resultados. Ao inspecionarmos todos eles, percebemos que apenas em (Coroa, Coroa, Coroa) não aparece pelo menos uma cara. Sendo assim, em 7 deles aparece pelo menos uma cara. Logo, a probabilidade solicitada é a fração $\frac{7}{8}$. $\square$

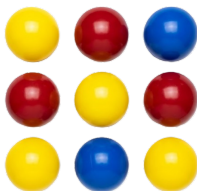
O exemplo anterior pode ser resolvido mais facilmente com a noção de *evento complementar*. A esse respeito, veja o material da vídeo-aula *Probabilidade de união e interseção de eventos*.

Exemplo 5. *Uma pessoa retirou uma dama de um baralho de 52 cartas e, a seguir, retirou uma segunda carta. Qual é a probabilidade de que essa segunda carta também seja uma dama?*



Solução. Ao retirarmos a primeira carta, o baralho ficará com $52 - 1 = 51$ cartas. Como o baralho tem quatro damas e retiramos uma na primeira carta, restarão três damas em nosso espaço amostral. Logo, a probabilidade solicitada deve ser igual a $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$. $\square$

Exemplo 6. *Em uma urna há 9 bolas: três vermelhas, quatro amarelas e duas azuis. Retira-se uma primeira bola, que não é amarela. Ao retirar-se ao acaso uma segunda bola, qual é a probabilidade de que ela seja amarela?*



Solução. Uma vez que a primeira bola retirada não foi amarela, concluímos que a quantidade de bolas amarelas dentro da urna (quatro) não se alterou. Porém, a quantidade total de bolas diminuiu em uma unidade, de forma que, agora, temos $9 - 1 = 8$ bolas na urna. Portanto, a probabilidade de que a segunda bola retirada seja amarela é $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\%$. $\square$

Exemplo 7. *Joaquim vai realizar um experimento que consiste em lançar simultaneamente uma moeda honesta e um dado honesto. Qual é a probabilidade de Joaquim obter o resultado “Cara” na moeda e um número primo no dado?*



Solução. Primeiramente, vamos determinar o tamanho do nosso espaço amostral. A moeda tem 2 resultados possíveis (Cara ou Coroa) e o dado tem 6 resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5 ou 6). Combinando cada resultado da moeda com cada resultado do dado, temos um espaço amostral formado por $2 \times 6 = 12$ resultados possíveis.

Agora, vamos analisar o evento de nosso interesse: queremos obrigatoriamente “Cara” na moeda e um número primo no dado.

Lembre-se de que os números primos presentes nas faces de um dado são apenas 2, 3 e 5 (o número 1 não é primo). Assim, os resultados favoráveis formam o seguinte conjunto de três elementos: $E = \{(Cara, 2), (Cara, 3), (Cara, 5)\}$.

Como o número de elementos do evento do qual desejamos calcular a probabilidade é 3 e o número de elementos do espaço amostral é 12, concluímos que a probabilidade solicitada é igual a

$$P(E) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

$\square$

2 Sugestões ao professor

Recomendamos separar dois encontros de 50 minutos cada para apresentar os conceitos fundamentais de probabilidade e os exemplos que compõem este material.

É importante o professor perceber que, ao longo dele, assumimos implicitamente que:

- todo subconjunto do espaço amostral corresponde a um evento possível, logo, pode ter sua probabilidade calculada;
- os eventos unitários de um espaço amostral são *equiprováveis*, isto é, o evento correspondente a cada elemento de um espaço amostral de n elementos tem probabilidade $\frac{1}{n}$.

Essas hipótese implícitas só devem ser comentadas com a turma caso o professor avalie que ela tem maturidade matemática suficiente para apreciar tais observações. Se assim for, o professor deve alertar os alunos para o fato de que a segunda suposição acima não é adequada à análise de toda situação; por exemplo numa moeda viciada, a probabilidade da ocorrência de uma *cara* pode ser $\frac{1}{3}$, circunstância em que a probabilidade da ocorrência de uma *coroa* será $\frac{2}{3}$. Em um tal contexto, a definição (1) não será a mais adequada.

O professor pode estruturar as aulas expandindo a teoria da seguinte maneira:

- Ao longo da aula, destaque a importância de descrever e contabilizar corretamente o espaço amostral para solucionar os exercícios. É importante que os alunos percebam quando esse espaço amostral se torna dinâmico (reduzindo de tamanho após a retirada de uma carta de baralho ou de uma bola de uma urna, por exemplo).
- Aproveite os encontros para revisar os conceitos de frações equivalentes e porcentagens. Mostre aos alunos que a probabilidade não é uma fórmula isolada, mas sim uma aplicação direta do raciocínio de proporções (parte pelo todo) que eles já dominam.

- Uma atividade lúdica e muito útil para o primeiro encontro seria realizar os experimentos físicos em sala de aula. Organize os alunos em duplas para disputas de “par ou ímpar” e peça que registrem os resultados de 30 ou 40 rodadas. Isso servirá para verificar que a frequência relativa dos resultados se aproxima da probabilidade prevista na tabela.

Ao realizar uma atividade como a última acima, o professor deve estar atento para a possibilidade de ocorrência da seguinte situação, que geralmente confunde os alunos, mas, de fato, é muito instrutiva: em uma ou mais duplas, a frequência de resultados “par” (respectivamente “ímpar”) pode vir a ser diferente de 50%; pior ainda, ela pode vir a ser muito maior que a frequência de resultados “ímpar” (respectivamente “ímpar”).

Caso isso aconteça, o professor deve observar que o que o cálculo correto de uma probabilidade assegura é que, *se o número de repetições de um experimento for cada vez maior, as frequências relativas dos resultados irão se aproximar das probabilidades calculadas*. Isso é garantido por um teorema bastante avançado de Matemática, conhecido como a *Lei dos Grandes Números*.