Material Teórico - Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas

A Lei dos Cossenos Revisitada

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de março de 2019

1 A Lei dos Cossenos Revisitada

Nas vídeos aulas “Lei dos Senos e dos Cossenos” do módulo de mesmo nome, a lei dos cossenos é apresentada e demonstrada em dois casos distintos. Lembre-se de que, para aplicar a lei dos cossenos, devemos escolher um triângulo e um de seus ângulos. Assim é que, lá, tínhamos duas equações, a depender do ângulo escolhido ser agudo ou obtuso. Abaixo, recordamos o enunciado do resultado que obtivemos.

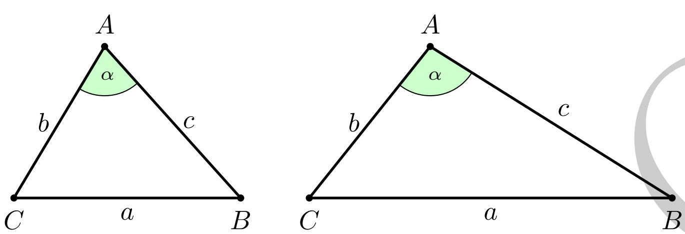
Proposição 1 (Lei dos Cossenos)**.** *Seja ABC um triângulo de lados com medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e cujo ângulo do vértice A mede α (radianos). Temos que:*

(a) Se $0 < \alpha < \pi/2$, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{1}$$

(b) Se $\pi/2 < \alpha < \pi$, então

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - \alpha). \tag{2}$$



(a) caso $0 < \alpha < \pi/2$. (b) caso $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Figura 1: ilustrações de possíveis triângulos de acordo com a medida do ângulo $\alpha = \measuredangle BAC$.

Observação 2. *No módulo “Lei dos Senos e dos Cossenos” a medida de α era tomada em graus, de modo que no lugar de cada ocorrência de π na Proposição 3 era usado $180°$.*

Pelo que estudamos na aula anterior, temos que

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Com isso, temos que

$$2bc\cos(\pi - \alpha) = 2bc(-\cos\alpha) = -2bc\cos\alpha.$$

Se substituirmos o que acabamos de encontrar na equação (2), o resultado obtido é justamente a equação (1). Isso que dizer que a equação (1) é válida em ambos os casos.

Há, ainda, o caso em que $\alpha = \pi/2$, que não foi considerado na Proposição 3. Neste caso, lembrando que $\pi/2$ corresponde a $90°$, usando o Teorema de Pitágoras temos que $a^2 = b^2 + c^2$ (já que a é a medida do lado oposto ao ângulo α, ou seja, a medida da hipotenusa, e b, c são as medidas dos outros dois lados, ou seja, dos catetos). Por outro lado, no módulo “Círculo Trigonométrico”, definimos que o cosseno de $\pi/2$ radianos é igual a zero. Assim, se substituirmos α por $\pi/2$ na equação (1), também obtemos $a^2 = b^2 + c^2$. Ou seja, a equação (1) também é válida para $\alpha = \pi/2$.

A conclusão é que (1) vale para todo α que é ângulo de um triângulo e que os dois resultados da Proposição 3, assim como o Teorema de Pitágoras, podem ser unificados como segue.

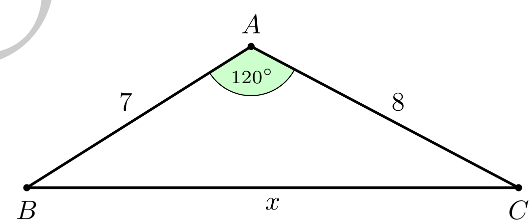
Proposição 3 (Lei dos Cossenos)**.** *Seja ABC um triângulo de lados com medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e cujo ângulo do vértice A mede α (radianos). Então, para qualquer α temos que:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{3}$$

Dessa forma, sabendo calcular cossenos de ângulos maiores ou iguais a $\pi/2$, só precisamos memorizar uma versão da lei dos cossenos. É claro que, para os demais ângulos do triângulo ABC, vales as relações análogas:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta),$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Exemplo 4. *Encontre o valor de x na figura abaixo.*



Solução. Aplicando a lei dos cossenos em relação ao ângulo $\hat{A}$, temos que:

$$\begin{aligned} x^2 &= 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8\cos(120°). \\ &= 49 + 64 - 112\cos(120°) \\ &= 113 - 112\cos(120°). \end{aligned}$$

Agora, lembre-se de que

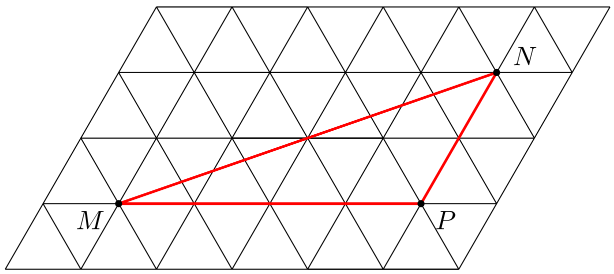
$$\cos(120°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x^2 &= 113 - 112 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 113 + 56 \\ &= 169. \end{aligned}$$

Como $x > 0$, temos que $x = \sqrt{169} = 13$. $\square$

Exemplo 5. *O paralelogramo da figura abaixo está dividido em triângulos equiláteros congruentes, de lados unitários. Calcule a medida do segmento MN.*



Solução. Observe que, no triângulo MNP da figura, temos que $\overline{MP} = 4$ e $\overline{NP} = 2$, já que cada triângulo possui lados de medida 1. Além disso, como cada triângulo unitário possui todos os seus ângulos medindo $60°$, temos que o ângulo $\measuredangle MPN$ mede $M\widehat{P}N = 2 \cdot 60° = 120°$. Seja $x = \overline{MN}$ a medida procurada. Aplicando a leis dos cossenos no triângulo MNP, temos que:

$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos(120°).$$

Assim como no exemplo anterior, basta usar que $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$ para encontrar o valor de x. Temos que

$$x^2 = 16 + 4 - 16\left(\frac{-1}{2}\right) = 20 + 8 = 28$$

e, como, $x > 0$, segue que $x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. $\square$

A lei dos cossenos também pode ser usada para calcular distâncias fisicamente inacessíveis. Quando desejamos calcular a distância (em linha reta) entre dois pontos de um terreno, no caso em que é possível visualizar um ponto a partir do outro, há várias maneiras de se calcular a distância entre eles. Por exemplo, se a distância não for muito longa, podemos ligar um ponto a outro por uma trena. Para distâncias maiores, diversos instrumentos, como por exemplo o teodolito – que funciona através de um dispositivo ótico –, podem ser utilizados; há também instrumentos que funcionam por ultrassom ou laser. Contudo, quando um dos pontos não pode ser alcançado ou mesmo visto a partir do outro, esses métodos não funcionam. Por exemplo, o que fazer se há um grande objeto, como uma rocha, entre os pontos cuja distância se deseja medir? Em casos como esse, precisamos recorrer a outras ideias.

Exemplo 6. *Entre os pontos A e B da Figura 3 existe uma grande rocha. Queremos construir uma estrada em linha reta de A até B, passando por um túnel dentro da rocha. O terreno possui, ainda, algumas árvores, mas foi possível encontrar um ponto específico C de onde é possível enxergar tanto A como B. Explique como podemos calcular o comprimento da estrada dispondo de um Teodolito e de um instrumento de medição de ângulos.*

Figura 2: teodolito usado na construção de Brasília. Fonte da figura: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Teodolito1.JPG`.

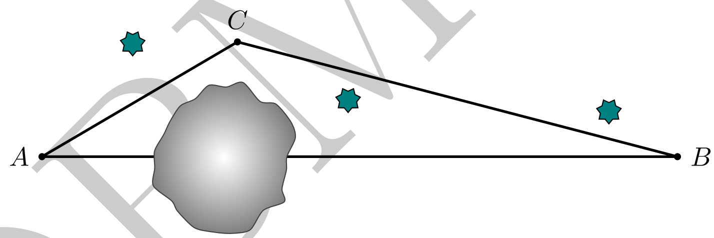


Figura 3: três pontos na floresta.

Solução. Com auxílio de um Teodolito, é possível calcular as distâncias de C até A e de C até B. Também podemos calcular a medida do ângulo $\measuredangle ACB$. Com isso, basta aplicar a lei dos cossenos para o ângulo $\hat{C}$ do triângulo ABC e calcular o comprimento de AB. $\square$

Observação 7. *Usando a lei dos senos (e, se necessário, uma calculadora), podemos calcular também os ângulos $\measuredangle BAC$ e $\measuredangle ABC$. Como conhecemos a direção da reta AC, podemos determinar a direção da reta AB, ou seja, em que direção devemos construir a estrada. Partindo de A podemos, então encontrar na rocha onde será a entrada do túnel. De modo semelhante, podemos determinar onde será a saída do túnel. Subtraindo da medida de $\overline{AB}$ os comprimentos da estrada de A até a rocha e de B até a rocha, podemos estimar também o comprimento do túnel.*

Exemplo 8. *Considere que, na Figura 3, as distâncias $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ medem 300 e 600 metros, respectivamente, e que $\measuredangle ACB$ mede $3\pi/4$. Calcule o comprimento de $\overline{AB}$.*

Solução. Seja $x = \overline{AB}$. Aplicando a lei dos cossenos usando o ângulo $\measuredangle C$ do triângulo ABC e lembrando que $\cos(3\pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos(3\pi/4) \\ &= 300^2 + 600^2 - 2 \cdot 300 \cdot 600 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

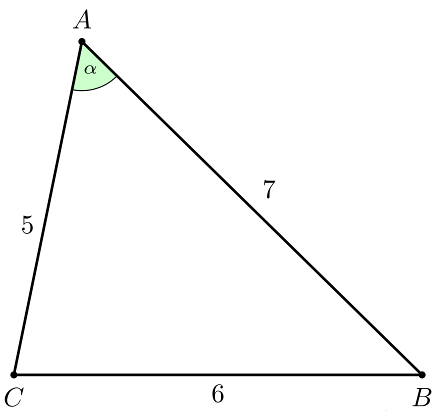
Com o auxílio de uma calculadora, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= 450.000 + 180.000\sqrt{2} \\ &\cong 450.000 + 254.558 \\ &= 704.558. \end{aligned}$$

Assim, $x = \sqrt{704.558} \cong 839{,}38$ (ou seja, $\overline{AC}$ mede quase 840 metros!). $\square$

De forma inversa, também podemos usar a lei dos cossenos para calcular os ângulos de triângulos quando conhecemos as medidas de todos os lados.

Exemplo 9. *No triângulo da figura abaixo, determine se o ângulo $\measuredangle BAC$ é agudo ou obtuso.*



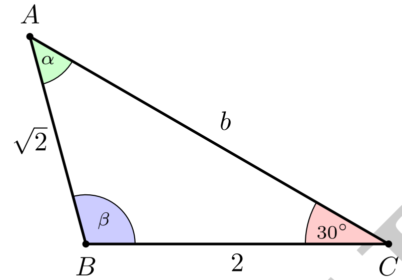
Solução. Aplicando a lei dos cossenos em relação ao ângulo $\measuredangle A$, temos:

$$\begin{aligned} 6^2 &= 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\alpha) \\ \Longrightarrow\ 36 &= 25 + 49 - 70\cos(\alpha) \\ \Longrightarrow\ 70\cos(\alpha) &= 38 \\ \Longrightarrow\ \cos(\alpha) &= 38/70 \cong 0{,}543. \end{aligned}$$

Veja que, como sabemos que α está entre 0 e 180° e como $\cos(\alpha) > 0$, concluímos que α é um ângulo agudo (está entre 0° e 90°). (Da mesma forma, se tivéssemos encontrado que $\cos(\alpha) < 0$, concluiríamos que α seria obtuso.) $\square$

Observação 10. *Com auxílio de uma calculadora científica, podemos descobrir que o ângulo α que satisfaz $\cos(\alpha) = 38/70$ mede aproximadamente $57{,}12°$. Para isso, basta usar a função* arccos *ou* $\cos^{-1}$ *da calculadora. É interessante que $57{,}12°$ corresponde a $57{,}12\pi/180$ radianos, ou seja, mede aproximadamente $0{,}996$ radianos, o que está muito próximo de 1 radiano!*

Exemplo 11. *Calcule o ângulo obtuso β da figura abaixo, sabendo que $\overline{BC} = 2$, $\overline{AB} = \sqrt{2}$ e $\measuredangle ACB = 30°$.*



Solução. Seja $b = \overline{AC}$, como na figura. Como não conhecemos nem b nem β, vamos precisar aplicar a lei dos cossenos duas vezes. Primeiro calculamos b aplicando-a em relação ao ângulo $\hat{C}$:

$$(\sqrt{2})^2 = 2^2 + b^2 - 2 \cdot 2b\cos(30°).$$

Como $\cos(30°) = \sqrt{3}/2$, temos $2 = 4 + b^2 - 2\sqrt{3} \cdot b$, o que nos dá a equação de segundo grau

$$b^2 - 2\sqrt{3} \cdot b + 2 = 0.$$

Resolvendo essa equação, temos $\Delta = 4$ e $b = \frac{2\sqrt{3} \pm 2}{2} = \sqrt{3} \pm 1$, ou seja, há duas possibilidades: $b = \sqrt{3} + 1$ ou $b = \sqrt{3} - 1$. Da figura, fica claro que $b > 2$ (o maior lado de um triângulo é oposto a seu maior ângulo); logo, $b = \sqrt{3} + 1$.

Agora, aplicando a lei dos cossenos para o ângulo $\measuredangle B$, substituindo o valor de b e simplificando, temos:

$$\begin{aligned} b^2 &= \sqrt{2}^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\cos\beta \\ (\sqrt{3}+1)^2 &= 6 - 4\sqrt{2}\cos\beta \\ 3 + 2\sqrt{3} + 1 &= 6 - 4\sqrt{2}\cos\beta \\ 4\sqrt{2}\cos\beta &= 2 - 2\sqrt{3} \\ \cos\beta &= \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Isso determina β de forma única (podemos, por exemplo, encontrá-lo usando uma calculadora). Porém, é possível que o leitor não saiba, de cabeça, qual ângulo possui tal cosseno.

Vamos, então, a uma outra solução: encontrar primeiro α usando a lei dos cossenos para o ângulo $\measuredangle A$ e, depois, usar que $\beta = 180° - 30° - \alpha = 150° - \alpha$. Temos que:

$$\begin{aligned} 2^2 &= (\sqrt{2})^2 + b^2 - 2 \cdot b\sqrt{2} \cdot \cos\alpha \\ 4 &= 2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}\cos\alpha \\ 4 &= 6 + 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}\cos\alpha. \end{aligned}$$

Logo,

$$2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}\cos\alpha = 2 + 2\sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3}),$$

o que nos diz que $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $\alpha = 45°$ e, daí, $\beta = 150° - 45° = 105°$. $\square$

Observação 12. *No exemplo anterior, provamos indiretamente que* $\cos(105°) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. *Consequentemente, como* $\cos(75°) = -\cos(180° - 75°) = -\cos(105°)$*, demonstramos que*

$$\cos(75°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Outra curiosidade é que

$$\cos(15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Esta última igualdade pode ser obtida usando que

$$\cos(15°) = \operatorname{sen}(90° - 15°) = \operatorname{sen}(75°)$$

em conjunto com a relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(75°) + \cos^2(75°) = 1.$$

Deixamos os cálculos necessários como exercício para o leitor.

Dicas para o Professor

O material desta aula é uma aplicação breve e imediata do conteúdo visto na aula anterior. Se os alunos tiveram aulas sobre lei dos cossenos recentemente, o conteúdo dessa aula pode ser apresentado muito rapidamente, digamos em único encontro de 50 minutos. Caso contrário, cabe ao professor decidir se deve fazer uma breve revisão da lei dos cossenos (por exemplo, seguindo o Módulo "Leis dos Senos e dos Cossenos") ou se simplesmente "pula" o material atual (a aula "A Lei dos Cossenos Revisitada"), retornando a ele em momento oportuno futuro, quando o tópico lei dos cossenos voltar a ser abordado.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.