Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Taxas de Variação - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de Abril de 2026

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Interpretaremos $x \in I$ e $y = f(x)$ como medidas de certas grandezas: a *grandeza independente*, x, e a *grandeza dependente* y. Por exemplo, x pode ser um instante de tempo e y a velocidade escalar, no instante x, de uma partícula que se move ao longo de um eixo.

Fixe $a \in I$. Conforme a seção 2.2 da aula *Definição e Exemplos*, do módulo *Definição de Derivada*, a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como a *taxa de variação instantânea* (ou simplesmente a *taxa de variação*) de y em relação a x, no ponto a. Isso significa que a variação $\Delta y = f(x) - f(a)$ da grandeza dependente, relativa à variação $\Delta x = x - a$ da grandeza independente, admite o valor $f'(a) \cdot \Delta x$ como uma "boa aproximação", sempre que Δx for suficientemente pequeno. Mais precisamente, temos

$$\Delta y \approx f'(a)\Delta x, \tag{1}$$

sendo o erro dessa aproximação *desprezível* em relação a Δx, para $\Delta x \approx 0$. [1]

Assim é que, quando $f(x)$ for a velocidade de uma partícula no instante x, $f'(x)$ será a aceleração (instantânea) dessa partícula no mesmo instante.

Nos exemplos que seguem, exploramos esse aspecto da derivada.

2 Exemplos

Exemplo 1. *O custo, em reais, para produzir x máquinas de um certo tipo por dia é dado por uma função quadrática C, cuja regra é $C(x) = 2\,000 + 100x - 0,1x^2$. Se a fabricação atual for de 60 máquinas por dia, qual será a variação aproximada do custo quando a fabricação aumentar 5%? Compare com a variação real do custo.*

[1] Isso significa que $\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta y - f'(a) \cdot \Delta x)/\Delta x = 0$. Confira as primeiras páginas da aula *Regra da Cadeia - Demonstração*, do módulo *Regra da Cadeia*.

Solução. A taxa de variação do custo em relação ao número de unidades produzidas é $C'(x) = 100 - 0,2x$; assim, quando a produção diária for de 60 máquinas, essa taxa de variação será de $C'(60) = 100 - 0,2 \cdot 60 = 88$ reais por máquina.

Como 5% de 60 é igual a 3, queremos uma aproximação para a variação do custo quando a produção diária aumentar de 60 para 63 máquinas. Utilizando a fórmula (1) para a função C, com $a = 60$ e $\Delta x = 3$, obtemos uma variação aproximada de

$$C'(60) \cdot \Delta x = 88 \cdot 3 = 264$$

reais.

Por outro lado, a variação real do custo, ΔC, é dada por

$$C(63) - C(60) = 100(63 - 60) - 0,1(63^2 - 60^2) = 263,1$$

reais.

Note que, ao usarmos a variação aproximada, o erro *percentual* em relação à variação real foi de

$$100 \cdot \frac{C'(60) \cdot \Delta x - \Delta C}{\Delta C} = \frac{90}{263,1} \approx 0,34$$

por cento. $\square$

Suponha que o custo para produzir x unidades de um certo produto seja $C(x)$, sendo C uma certa função derivável. Em *Economia*, a taxa de variação do custo em relação ao nível de produção chama-se *custo marginal*. Com essa terminologia, $C'(a)$ torna-se o *custo marginal na produção de a unidades*.

Em relação ao exemplo anterior, vimos que o custo marginal na produção de 60 máquinas, $C'(60)$, é de 88 reais por máquina. De um modo geral, o custo marginal $C'(a)$ permite estimar o custo extra ΔC de produção quando acrescemos Δx unidades às a unidades produzidas: $\Delta C \approx C'(a) \cdot \Delta x$ (vide relação (1)).

Uma outra noção útil é a de *custo médio*: por definição, o custo médio para produzir x unidades é de $C(x)/x$ reais por unidade.

Exemplo 2. *O custo $C(x)$ para produzir x unidades de um certo produto é dado por uma função derivável $C : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.*

Se o custo médio atingir um valor mínimo quando a unidades forem produzidas, em que $a > 0$, mostre que o custo médio para produzir a unidades coincide com o custo marginal na produção de a unidades.

Solução. De fato, seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função custo médio, de forma que $f(x) = C(x)/x$, para cada $x > 0$. Como f é derivável e assume um valor mínimo em a, a Observação 6 da aula *Propriedades - Parte I*, do módulo *Derivada como Função*, garante que $f'(a) = 0$. Sendo

$$f'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2},$$

vem que

$$f'(x) = \frac{C'(x) - f(x)}{x}. \tag{2}$$

Dessa forma,

$$f'(a) = 0 \Rightarrow C'(a) = f(a),$$

ou seja, o custo marginal e o custo médio coincidem na produção de a unidades. □

O próximo exemplo é um tanto mais envolvente, do ponto de vista matemático. Uma possibilidade é omiti-lo numa primeira leitura.

Exemplo 3. *Nas hipóteses do exemplo 2, suponha que a função custo C seja duas vezes derivável, com segunda derivada positiva. Mostre que a igualdade entre o custo médio e o custo marginal na produção de a unidades implica que o custo médio para produzir a unidades é o menor possível.*

Solução. Como na solução do exemplo 2, seja f a função custo médio. De acordo com a equação (2) e a hipótese $C'(a) = f(a)$, obtemos $f'(a) = 0$. Utilizando a relação (2) mais uma vez, um cálculo elementar fornece

$$f''(x) = \frac{C''(x) - 2f'(x)}{x}.$$

Portanto, $f''(a) = C''(a)/a > 0$, de sorte que f' cresce no ponto a. Nesse caso, deve existir $\delta > 0$ tal que $f' < 0$ em $(a - \delta, a)$ e $f' > 0$ em $(a, a + \delta)$. Pelo teste da 1ª derivada, a é ponto de mínimo local estrito para f. A solução estará concluída uma vez que justifiquemos a seguinte

`Afirmação`. O ponto a é de mínimo global estrito para a função custo médio f.

Suponha, por contradição, que exista $b > 0$ satisfazendo $f(b) \leq f(a)$. Não há perda de generalidade em supor $a < b$. Como $f(x) > f(a) \geq f(b)$, para todo $x \in (a, b) \cap (a, a + \delta)$, o valor máximo de f no intervalo $[a, b]$ não pode ser assumido no extremos. Então, algum $x_0 \in (a, b)$ é ponto de máximo local para f, o que implica $f'(x_0) = 0$. Além disso, não é possível que tenhamos $f''(x_0) > 0$, pois, caso contrário, os argumentos acima diriam que x_0 seria ponto de mínimo local estrito para f.

Por outro lado, assim como no 1º parágrafo,

$$f''(x_0) = \frac{C''(x_0) - 2f'(x_0)}{x_0} = \frac{C''(x_0)}{x_0} > 0,$$

o que já sabemos ser impossível. Essa contradição termina a justificativa da afirmação. □

As seguintes noções serão úteis na discussão do próximo exemplo.

Dizemos que uma função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma *proporcionalidade*, ou que a grandeza $y = f(x)$ é *diretamente proporcional* à grandeza x, quando

i) f for monótona não decrescente;

ii) $f(nx) = nf(x)$, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$.

Pelo *teorema fundamental da proporcionalidade* (TFP) [2], uma função f nas condições acima deve ser linear: pondo $a := f(1)$, vale que $f(x) = ax$ para cada $x \geq 0$.

De forma similar, dizemos que uma grandeza $z = f(x, y)$ é diretamente proporcional às grandezas x e y, em que x, y e z assumem valores não negativos, quando as correspondências $x \mapsto f(x, y)$ e $y \mapsto f(x, y)$ forem proporcionalidades. Nesse caso, não é difícil provar, com ajuda do TFP, que $f(x, y) = axy$ para quaisquer $x, y \geq 0$ e $a = f(1, 1)$.

Por exemplo, podemos afirmar que *o volume de uma pirâmide é diretamente proporcional à área de sua base e à medida de sua altura*, sentença confirmada pela fórmula para o cálculo do volume V de uma pirâmide de área da base A e altura h, que é dada por $V = \frac{1}{3} Ah$.

Para outro exemplo, um *gás ideal*, ou *perfeito*, é um gás composto por partículas pontuais que não interagem entre si, exceto por colisões perfeitamente elásticas. Para ele, vale a *lei dos gases perfeitos*, também conhecida como *lei de Clapeyron*: *a temperatura absoluta do sistema é diretamente proporcional à pressão e ao volume.* Realmente, a formulação precisa dessa lei diz que se n moles[3] estiverem confinados em um volume V, à pressão P e temperatura absoluta[4] T, então $nRT = PV$, em que R é uma constante positiva, denominada a *constante universal dos gases perfeitos*.

Exemplo 4. *A taxa de contágio de uma epidemia viral entre os moradores de uma comunidade é proporcional ao número de moradores que ficaram doentes e ao número daqueles que ainda não contraíram o vírus. Mostre que a doença contagia mais rapidamente quando metade dos moradores da comunidade já estão doentes.*

Solução. Sejam P o número de moradores da comunidade e $c(t)$ o número de moradores contagiados no instante t [5].

[2] Confira [1].

[3] Essencialmente, o número de partículas do gás.

[4] Isto é, medida na escala Kelvin.

[5] Perceba que o gráfico de c é do tipo escada, com descontinuidades nos instantes em que ocorre algum contágio. Como o problema fala em

De acordo com as hipóteses e a discussão anterior ao exemplo, deve existir uma constante positiva M tal que

$$c'(t) = Mc(t)(P - c(t)),$$

para cada instante t. Como o valor máximo da função quadrática $x \mapsto x(P - x)$ ocorre no ponto $x = P/2$, vemos que a taxa de variação $c'(t)$ será máxima precisamente quando ocorrer a igualdade $c(t) = P/2$. De outro modo, a taxa de contágio será máxima quando metade dos moradores tiverem sidos infectados pelo vírus.

$\square$

Exemplo 5. *Estima-se que, daqui a t anos, a população de uma certa comunidade suburbana será de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ milhares de habitantes. Qual será o aumento aproximado da população durante os próximos três meses?*

Solução. Atualmente, a população é de $P(0) = 20 - 6 = 14$ mil habitantes. Observando que

$$P'(t) = \frac{6}{(t+1)^2},$$

vê-se que a taxa anual atual de crescimento populacional é de $P'(0) = 6$ mil habitantes por ano. Como três meses equivale a um quarto de ano, estima-se que o aumento populacional da comunidade daqui a três meses seja de

$$P'(0) \cdot \frac{1}{4} = 1,5$$

mil habitantes.

Perceba que o aumento populacional estimado pela função P deve ser de $P(1/4) - P(0) = 1,2$ mil habitantes. $\square$

Exemplo 6. *Estime o que acontecerá à área de um círculo se seu raio aumentar em 1%.*

taxa de variação de c, convém advertir que, nesse e em outros casos, é comum admitir que a função utilizada seja um modelo matemático que *aproxime* a situação real, sendo tal modelo "suficientemente" derivável.

Solução. Seja $A : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função-área do círculo, de modo que $A(R) = \pi R^2$. Se o raio R de um círculo aumentar em 1%, sua área passará de $A(R)$ para $A(1,01 \cdot R)$.

Para obter uma aproximação da variação sofrida pela função A, utilizaremos a relação (1), calculando

$$A'(R) \cdot \Delta R = 2\pi R \cdot (0,01 \cdot R) = 0,02\pi R^2.$$

Portanto, o aumento da área foi de, aproximadamente,

$$100 \cdot \left(\frac{A(R) + 0,02\pi R^2}{A(R)} - 1 \right) = 2$$

por cento. A conclusão é a de que um aumento de 1% no raio provoca um aumento em torno de 2% na área do círculo. [6]

$\square$

Exemplo 7. *Uma partícula está se movendo ao longo da curva* $y = \sqrt{x}$*. Quando ela passa pelo ponto* $(4, 2)$*, sua coordenada* x *cresce a uma taxa de* 3 *cm/s. Quão rápido a distância da partícula à origem varia nesse instante?*

Solução. As coordenadas $x = x(t)$ e $y = y(t)$ da partícula são funções (deriváveis) do tempo t, com $y(t) = \sqrt{x(t)}$.

Se $s(t)$ for a distância da partícula à origem no instante t, tem-se

$$s(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$$

de sorte que

$$s(t)^2 = x(t)^2 + x(t). \tag{3}$$

O problema pede que se calcule $s'(t_0)$, sendo t_0 um instante em que $x(t_0) = 4$ cm e $x'(t_0) = 3$ cm/s. Para tanto, diferenciando-se a relação (3) com respeito a t, obtém-se

$$2s'(t_0)s(t_0) = 2x'(t_0)x(t_0) + x'(t_0).$$

Como

$$s(t_0) = \sqrt{x(t_0)^2 + x(t_0)} = 2\sqrt{5}$$

[6] Convidamos o leitor a comparar essa estimativa com a variação real e constatar que se trata de uma aproximação razoavelmente boa.

centímetros, segue que

$$4\sqrt{5}s'(t_0) = 27,$$

ou seja, $s'(t_0) = 27\sqrt{5}/20$ cm/s. Portanto, a distância da partícula à origem, no instante t_0, varia a uma taxa aproximada de $3,02$ cm/s. $\square$

Exemplo 8. *Está vazando água de um tanque cônico invertido, a uma taxa de $10\,000$ cm^3/s. Ao mesmo tempo, está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for 2 m, calcule a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.*

Solução. Sejam $V(t)$, $h(t)$ e $r(t)$ o volume de água, a altura da água e o raio da superfície circular de água no tanque, respectivamente, no instante t (veja a figura abaixo).

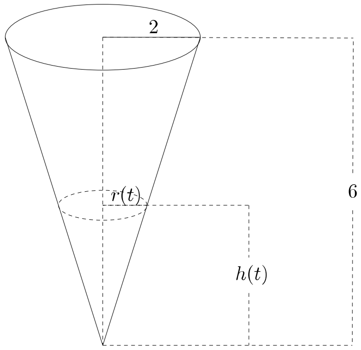

Figura 1

Por semelhança de triângulos, temos $\frac{r(t)}{2} = \frac{h(t)}{6}$, de forma que $r(t) = h(t)/3$. Pela fórmula do volume de um cone circular, $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, segue que

$$V(t) = \frac{\pi h(t)^3}{27}.$$

Diferenciando essa relação com respeito a t, obtemos, com o auxílio da regra da cadeia,

$$V'(t) = \frac{\pi h'(t) h(t)^2}{9}. \tag{4}$$

Agora, se a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque for de k cm^3/s, o fato de que a altura da coluna d'água cresce garante que $k > 10\,000$ e, portanto, a taxa de variação do volume de água no tanque é

$$\frac{dV}{dt} = k - 10\,000.$$

cm^3/s. Se t_0 for o instante no qual $h(t_0) = 2\,m = 200\,cm$ e $h'(t_0) = 20\,cm/min = \frac{1}{3}\,cm/s$, a equação (4) permite escrever

$$k - 10\,000 = \frac{\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 40\,000}{9} = \frac{40\,000\pi}{27},$$

ou seja,

$$k = 10\,000\left(\frac{4\pi}{27} + 1\right) \approx 14\,654$$

centímetros cúbicos por segundo. □

Dicas para o Professor

Situações em que lidamos com taxas de variação de várias grandezas dependentes, as quais guardam alguma relação entre si, costumam ser chamadas de *problemas de taxas relacionadas*. (Confira os exemplos 7 e 8.)

O leitor encontrará mais exercícios sobre taxas de variação nas referências [2] e [3].

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. et al. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 1*. 11ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

2. J. Stewart. *Cálculo, volume* 1. 5ª ed. Thomson, 2006.

3. G. B. Thomas. *Cálculo, vol. 1*. 11ª ed. São Paulo: Pearson, 2009.