Material Teórico - Módulo de NÚMEROS NATURAIS: REPRESENTAÇÃO E OPERAÇÕES BÁSICAS

Operações com números naturais - Parte 02

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Outubro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

O objetivo deste material é apresentar uma nova operação que pode ser realizada entre dois números naturais: a **multiplicação**.

A multiplicação é uma operação que pode ser definida a partir da noção de adição. Neste material, utilizaremos o símbolo $\times$ para denotar a operação de multiplicação, cuja definição é:

Definição 1. *Dados a e b números naturais, definimos a multiplicação de a por b, lida* ***a vezes b*** *e denotada $a \times b$, por*

$$a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ vezes}}.$$

Na definição acima, os números a e b são denominados **fatores** da multiplicação, enquanto o resultado $a \times b$ é o **produto**.

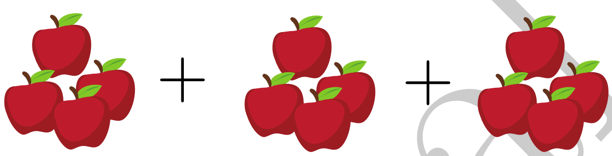
Por exemplo,

$$4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.$$

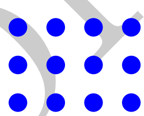
$$5 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35.$$

Agora, vamos dar duas interpretações distintas para a multiplicação:

I. A primeira delas é utilizando diretamente a definição, ou seja, a multiplicação é apresentada como uma soma de parcelas iguais. Por exemplo, 3×4 significa somar três parcelas de quatro unidades cada, resultando em um total de 12 unidades.



II. Na segunda, pode-se utilizar uma configuração de pontos em formato retangular, em que a multiplicação $a \times b$ representa a linhas de b bolinhas cada uma. Por exemplo, a figura que representa 3×4 é:



3×4

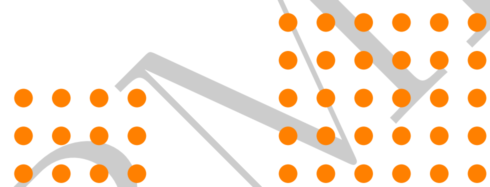
Através da representação da multiplicação pela disposição de bolinhas em um reticulado (em formato retangular), podemos perceber algumas de suas propriedades. Iniciamos com a:

Comutatividade

Se a e b são números naturais, então:

$$a \times b = b \times a.$$

A figura abaixo traz dois reticulados: o da esquerda tem 12 bolinhas, cuja distribuição pode ser pensada como 3 linhas de 4 bolinhas em cada, ou como 4 colunas de 3 bolinhas em cada. Já o reticulado da direita possui 30 bolinhas que podem ser pensadas como 5 linhas com 6 bolinhas em cada, ou como 6 colunas com 5 bolinhas em cada.



3×4 $\quad$ 5×6

Assim,

$$3 \times 4 = 4 \times 3 \quad \text{e} \quad 5 \times 6 = 6 \times 5.$$

Evidentemente, esse tipo de argumento pode ser executado para quaisquer outros inteiros positivos, justificando, assim, a igualdade $a \times b = b \times a$.

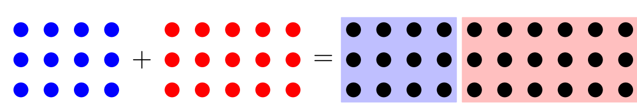
Agora, apresentamos a *distributividade*, propriedade que envolve uma multiplicação na qual um dos fatores é uma adição:

Distributividade

Se a, b e c são números naturais, então:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

A figura a seguir explica porque a distributividade funciona no caso em que $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$. Como no



3×4 $\quad$ 3×5 $\quad$ $3 \times (4 + 5) = 3 \times 9$

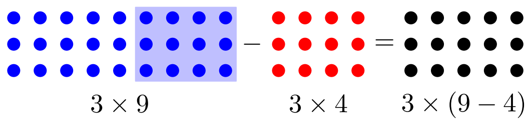
caso da comutatividade, essa representação por bolinhas pode ser facilmente adaptada para justificar a igualdade $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, quaisquer que sejam os valores naturais de a, b e c.

Vale destacar o fato que a distributividade também funciona quando utilizada com a operação de subtração, isto é,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c.$$

Na próxima figura vemos uma ilustração dessa propriedade para o caso particular

$$3 \times (9-4) = 3 \times 9 - 3 \times 4.$$



A propriedade distributiva é especialmente útil quando utilizamos cálculo mental para realizar multiplicações. Substituindo um dos fatores por uma adição ou subtração, podemos simplificar os cálculos. Vejamos dois exemplos simples.

Exemplo 2. *Calcule o resultado da multiplicação* 9.999×49.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} 9.999 \times 49 &= (10.000 - 1) \times 49 \\ &= 490.000 - 49 \\ &= 489.951. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Calcule* 5082×1010.

Solução. Podemos escrever

$$\begin{aligned} 5082 \times 1010 &= 5082 \times (1000 + 10) \\ &= 5082 \times 1000 + 5082 \times 10 \\ &= 5082000 + 50820 \\ &= 5132820. \end{aligned}$$

□

As soluções dos exemplos anteriores ilustram um princípio básico da Matemática: trocar uma situação por outra que seja equivalente e mais fácil de resolver.

Finalizamos essa seção comentando sobre uma última propriedade útil da multiplicação, a *associatividade*.

Associatividade

Se a, b e c são números naturais, então:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

A associatividade da multiplicação nos diz que, sempre que tivermos vários fatores a serem multiplicados, a ordem na qual escolhermos efetuar as multiplicações desses fatores não mudará o resultado final. Vejamos como essa propriedade pode ser útil no seguinte

Exemplo 4. *Calcule o resultado da expressão*

$$345.897 \times 25 \times 4.$$

Solução. Se efetuarmos as multiplicações na ordem natural em que elas aparecem, isto é,

$$(345.897 \times 25) \times 4,$$

a dificuldade será bem maior do que se fizermos

$$345.897 \times (25 \times 4) = 345.897 \times 100 = 34.589.700.$$

□

2 O algoritmo da multiplicação

As propriedades de comutatividade e distributividade são fundamentais para a eficácia do algoritmo de multiplicação, que apresentaremos a seguir.

Para simplificar o entendimento do mesmo, exporemos primeiro como calcular o produto P de um número N de vários algarismo por um número a de um único algarismo:

$$P = N \times a.$$

Algoritmo de multiplicação por algarismo

(1) Inicie na casa das unidades de N e faça $d = 0$.

(2) Em cada etapa, multiplique o algarismo de N, da casa em que estiver, por a. Em seguida, some d ao produto e escreva, na casa correspondente em P, o algarismo das unidades dessa soma.

(3) Se o valor da soma calculada no passo (2) for menor ou igual a 9, então:

   i. Se N ainda tiver casas à esquerda da atual, passe para a casa de N situada à esquerda da casa atual e volte ao passo anterior.

   ii. Se N não tiver mais casas à esquerda da atual, pare.

(4) Se o valor da soma calculada no passo (2) for maior do que 9, atribua a d o dígito da dezenas dessa soma. Em seguida:

   i. Se N ainda tiver casas à esquerda da atual, passe para a casa de N situada à esquerda da casa atual e volte ao passo (2).

   ii. Se N não tiver casas à esquerda da atual, atribua à próxima casa de P o valor atual de d e pare.

Vejamos como o algoritmo acima funciona no seguinte

Exemplo 5. *Calcule* 589×7*.*

Solução. Iniciando na casa das unidades e com $d = 0$, calculamos $9 \times 7 + d = 63 + 0 = 63$. Então, escrevemos 3 (o algarismo das unidades de 63) no lugar do algarismo das unidades do resultado e fazemos $d = 6$ (pois 6 é o algarismo das dezenas da soma).

	C	D	↓ U
		+6	
	5	8	9
×			7
			3

Avançando para a casa das dezenas de 589, calculamos $8 \times 7 + d = 56 + 6 = 62$. Escrevemos 2 no lugar do algarismo das dezenas do resultado e fazemos $d = 6$ (pois, por coincidência, 6 também é o algarismo das dezenas de 62).

	C	↓ D	U
	+6		
	5	8	9
×			7
		2	3

Avançando para a casa das centenas de 589, calculamos $5 \times 7 + d = 35 + 6 = 41$. Escrevemos 1 no lugar do algarismo das centenas do resultado e fazemos $d = 4$ (pois 4 é o algarismo das dezenas de 41).

	C	↓ D	U
+4			
	5	8	9
×			7
	1	2	3

Por fim, como $d = 4 > 0$ e N não tem mais algarismos, atribuímos ao algarismo das unidades de milhar do produto o valor 4 e paramos. O produto é 4123.

	C	↓ D	U
+4			
	5	8	9
×			7
4	1	2	3

□

Uma consequência importante do método que apresentamos é a conclusão de que só é necessário memorizar os resultados das multiplicações entre os algarismos (de 0 a 9) – a famosa *tabuada* que mostramos na próxima figura de maneira compacta.

Observe que, graças à propriedade comutativa, basta memorizar os produtos $a \times b$, com $0 \le a \le b \le 9$, isto é, a metade branca ou azul da tabuada.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 1: Tabela de multiplicação entre dois dígitos. A distributividade garante que estes são os únicos produtos que devemos memorizar

A versão completa do algoritmo da multiplicação, na qual multiplicamos dois números com qualquer quantidade de dígitos, baseia-se na distributividade. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 6. *Para calcular* 7293×162*, começamos escrevendo a representação decimal de* 162 *e utilizando a propriedade distributiva para obter*

$$\begin{aligned} 7293 \times 162 &= 7293 \times (1 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0) \\ &= \big(7293 \times 1 \times 10^2 + 7293 \times 6 \times 10^1 \\ &\qquad + 7293 \times 2 \times 10^0\big). \end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos o algoritmo descrito anteriormente para calcular os resultados da multiplicações de 7293 *por cada um dos algarismos de* 162 *(isto é, os resultados das multiplicações* 7293×1*,* 7293×6 *e* 7293×2*). Depois, acrescentamos à direita de cada um dessas multiplicações uma quantidade de zeros igual ao expoente da potência de* 10 *que marca a posição do respectivo algarismo na representação decimal do número* 162*. Por fim, somamos todos os valores utilizando-se o algarismo da adição.*

Na prática, utilizamos uma estrutura tabelar para realizar tais multiplicações. Observe:

UMM	CM	DM	UM	C	D	U
			7	2	9	3
×				1	6	2
		1	4	5	8	6
	4	3	7	5	8	0
+	7	2	9	3	0	0
1	1	8	1	4	6	6

Os número 14586, 43758 e 7293 correspondem aos resultados das multiplicações 7293×2, 7293×6 e 7293×1, respectivamente. Cada um desses valores é acrescido, à direita, de uma quantidade de zeros igual ao expoente da potência de 10 que o acompanha na representação decimal de 162 do algarismo pelo qual foi multiplicado. Assim, a 14586 acrescemos 0 zeros (uma vez que 2 comparece, em 162, multiplicando 10^0), a 43758 acrescemos 1 zero (uma vez que 6 comparece, em 162, multiplicando 10^1) e, por fim, a 7293 acrescemos 2 zeros (uma vez que 1 comparece, em 162, multiplicando 10^2. Por fim, somamos $14586+43758+7293$ com o auxílio do algoritmo da adição, obtendo 1181466.

3 Sugestões aos professores

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental os estudantes têm os primeiros contatos com os algoritmos das operações básicas entre números naturais. Neste primeiro momento, o foco está na parte puramente procedimental dos algoritmos.

Já nos anos finais do Ensino Fundamental, os algoritmos são mais uma vez abordados. Porém, o foco nesse momento deve ser outro. Os professores devem evidenciar que os algoritmos nada mais são do que um conjunto de passos bem sequenciados que permitem chegar aos resultados das operações. Além disso, os alunos devem aprender como a eficácia dos algoritmos está associada com as propriedades do sistema indo-arábico.

Também é importante introduzir situações-problemas cujas soluções envolvam o uso dos algoritmos. Assim, enfatizamos a visão de que a Matemática pode ser entendida como uma ferramenta para resolver problemas.

Separe dois encontros de 50 minutos para ministrar o conteúdo desse material. No primeiro, faça o desenvolvimento até o algoritmo da multiplicação básico. No segundo, faça vários exemplos com o algoritmo completo (com qualquer quantidade de dígitos).

Existem outras algoritmos de multiplicação que são mais eficientes do que aquele que foi apresentado neste material, mas cujos passos são mais difíceis de memorizar. Você pode encontrar uma discussão sobre esse assunto no link a seguir: